conect@ estrategias

Edición revisada

Matemáticas

Silvia García Peña
Tatiana Mendoza von der Borch
José Cruz García Zagal
David Block Sevilla

3

Pensamiento matemático

Secundaria

sm

DIRECCIÓN DE CONTENIDOS Y SERVICIOS EDUCATIVOS
Elisa Bonilla Rius

GERENCIA DE PUBLICACIONES ESCOLARES
Felipe Ricardo Valdez González

AUTORES
Silvia García Peña, Tatiana María Mendoza Von der Borch
José Cruz García Zagal, David Francisco Block Sevilla

COORDINACIÓN EDITORIAL
Ernesto Manuel Espinosa Asuar

EDICIÓN
Cristóbal Bravo Marván

ELABORACIÓN DE EVALUACIONES DE OPCIÓN MÚLTIPLE, ACTIVIDADES CON TECNOLOGÍA Y SELECCIÓN DE ENLACES WEB
Eric Ruíz Flores González, Valentina Muñoz Porras

REVISIÓN TÉCNICA
Armando Solares Rojas

REVISIÓN DE EVALUACIONES DE OPCIÓN MÚLTIPLE
Instituto de Evaluación y Asesoramiento Educativo (IDEA)

COLABORACIÓN
Mónica de Lourdes Valencia
(páginas 68, 69, 106, 107, 158 y 159)

COORDINACIÓN DE CORRECCIÓN
Abdel López Cruz

CORRECCIÓN
Juan Eduardo Jiménez Zurita
Ricardo Maldonado Gutiérrez

DIRECCIÓN DE ARTE
Quetzatl León Calixto

DISEÑO DE LA SERIE Y PORTADA
Brenda López Romero

COORDINACIÓN GRÁFICA
César Leyva Acosta

DIAGRAMACIÓN
César Leyva Acosta
Maricarmen Martínez Muñoz

COORDINACIÓN DE ICONOGRAFÍA E IMAGEN
Ricardo Tapia

ICONOGRAFÍA
Alejandra Amador, Abril García, Ilia Muñoz

FOTOGRAFÍA
© 2013, Carlos A. Vargas, © Thinkstock, 2013
© Other Images, 2013, © Archivo SM, 2013
© Francisco Palma, 2013

DIGITALIZACIÓN Y RETOQUE
Carlos Alberto López Hernández

PRODUCCIÓN
Carlos Olvera, Víctor Canto, Lilia Alarcón

Matemáticas 3. Secundaria. Conect@ Estrategias
Primera edición, 2014
Primera edición revisada, 2016

Magdalena 211, Colonia del Valle,
03100, México, D. F.
Tel.: (55) 1087 8400
www.ediciones-sm.com.mx

ISBN 978-607-24-1021-3

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número 2830

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Presentación

¿Qué es **hacer matemáticas**? Diseñar un vitral, medir la superficie de un terreno, averiguar la tarifa telefónica más conveniente, decidir si un juego de dados es justo e interpretar los datos de una gráfica en una noticia del periódico son algunos de los muchos casos en que hacemos matemáticas.

También **hacemos matemáticas** cuando contestamos preguntas propias de esta disciplina; por ejemplo: ¿existe un número que multiplicado por 5 dé un resultado menor que 5? ¿Las medidas de los lados de un triángulo pueden ser tres números cualesquiera? ¿La suma de dos números impares consecutivos siempre es múltiplo de cuatro?…

Hacer matemáticas es usar los conocimientos de esta disciplina para resolver ciertos problemas, y también es crear nuevos conocimientos, cuando los que se tienen son insuficientes.

Hacer matemáticas es, asimismo, una buena manera de aprenderlas. Por ello, en este libro te proponemos numerosas cuestiones que pueden resolverse con su ayuda. Nos interesa que aprendas matemáticas y las consideres como una herramienta para pensar.

Presentación para el alumno

Cuando afrontas problemas nuevos debes sentirte con la libertad de poner en práctica lo que se te ocurra para resolverlos; por ejemplo, apoyarte en dibujos, ensayar resultados o procedimientos y, cuando éstos no funcionen, probar otra vez. Poco a poco, al resolver más problemas, al conocer cómo proceden tus compañeros y con la ayuda del profesor, mejorará la manera en que los resuelves: será cada vez más ordenada, sistemática y comprobable. Es decir, harás mejores matemáticas.

Para aprender matemáticas es recomendable combinar el estudio individual con el trabajo en parejas, en equipos y en grupo.

- Al afrontar una nueva tarea es bueno que reflexiones; después, es importante que compartas tus ideas y dudas con los otros. Trabajar en parejas o en equipos puede serte muy útil para avanzar.
- El hecho de explicar al grupo tus procedimientos o los de tu equipo, conocer lo que hicieron otros equipos, decidir juntos si los resultados son correctos y atender los aportes del profesor, te ayudará mucho a aprender.
- También es importante que, en algún momento, averigües si puedes hacer tú solo la tarea.

A lo largo del libro se sugiere el trabajo en grupo, en equipo o en parejas. Sin embargo, es el profesor quien indicará el tipo de organización más adecuado para cada momento.

Esperamos, igual que todos los autores que escriben para jóvenes como tú, que este libro, además de ayudarte a aprender, te anime a exclamar: "¡Esto sí me gusta!".

Los autores

Conect@ Estrategias está estructurado en cinco bloques, que tienen los siguientes elementos.

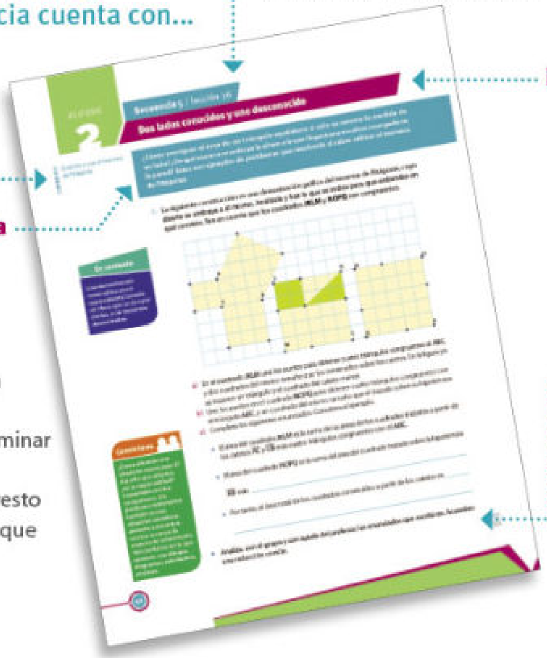
Entrada de bloque
Se presenta un contexto histórico o una situación cercana a ti, y se plantean preguntas para fomentar el uso de las competencias matemáticas. El contexto de esta sección se retoma al final del bloque, en la evaluación tipo PISA. También se enumeran los aprendizajes esperados del bloque.

Los contenidos se desarrollan en secuencias didácticas de varias lecciones. Cada secuencia cuenta con...

Número de bloque, de secuencia y de lección
Las secuencias se numeran por bloque. La numeración de las lecciones es continua en todo el libro.

Contenido
Se indica el contenido que trabajarás en la secuencia.

Nombre de la lección

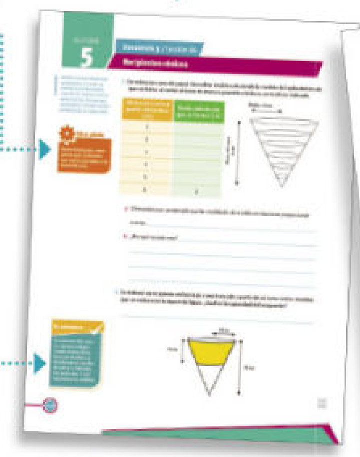


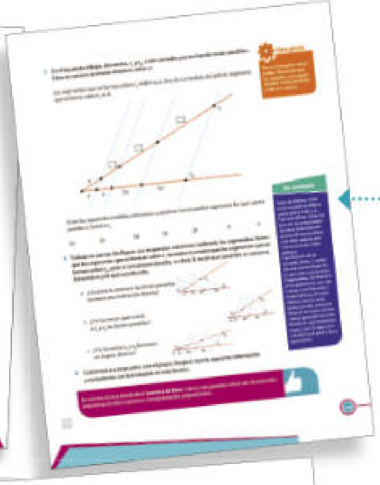
Introducción a la secuencia
En la primera lección de cada secuencia se destaca algún aspecto sobresaliente del conocimiento que estudiarás. Lee la información junto con un compañero y, si es necesario, respondan las preguntas. Al terminar la secuencia, vuelve a leer la información, coméntala con el resto del grupo y contrástenla con lo que aprendieron en la lección.

Puestas en común
Es el momento en el que compararás, argumentarás y validarás tus respuestas en equipo o en grupo.

En las secuencias se intercalan cápsulas que fomentan la reflexión y el análisis, plantean retos y fortalecen las habilidades.

Una pista
Sugerencias para la resolución de algún problema o ejercicio con cierto grado de dificultad.

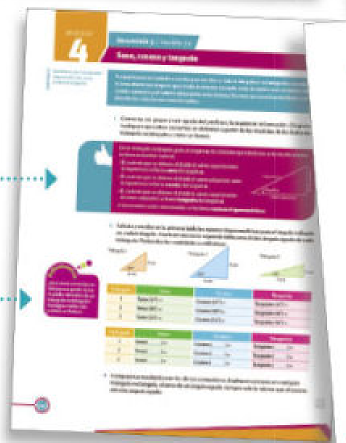


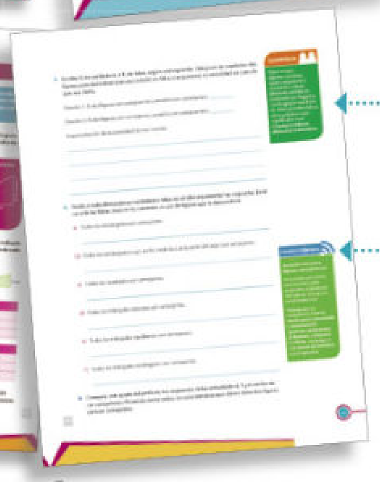


En contexto
Se muestran contextos en los que se usan los conocimientos matemáticos que estás trabajando. A veces también se explica un concepto, se da una definición relacionada con la actividad o se sugieren libros de la Biblioteca Escolar y de la Biblioteca de Aula relacionados con el contenido que se trabaja en la lección.

Ya sabemos...
Recordatorio de conceptos o técnicas que ya conoces.

Conceptos
Contiene información relevante como conceptos, técnicas o las fórmulas que usarás en la lección.

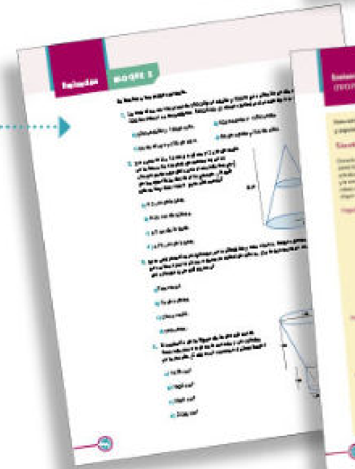


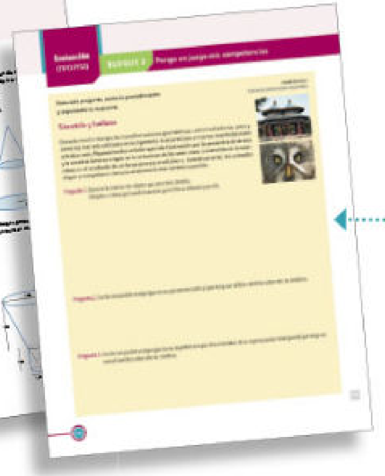


Convivimos
En cada bloque se hacen sugerencias que apoyan el desarrollo de las actitudes y valores que forman parte de tus competencias matemáticas. Comenta con tu grupo de qué forma las llevarán a cabo.

Reflexionamos
Preguntas que ayudan a profundizar en el aprendizaje de los contenidos. Respóndelas junto con un compañero, justifiquen su respuesta en su cuaderno y anoten las dificultades que tuvieron para hacerlo.

Conect@mos
Sugerencias de actividades relacionadas con el uso de las TIC. Del 8 al 17 de noviembre de 2013 se verificó que todos los vínculos siguieran activos.



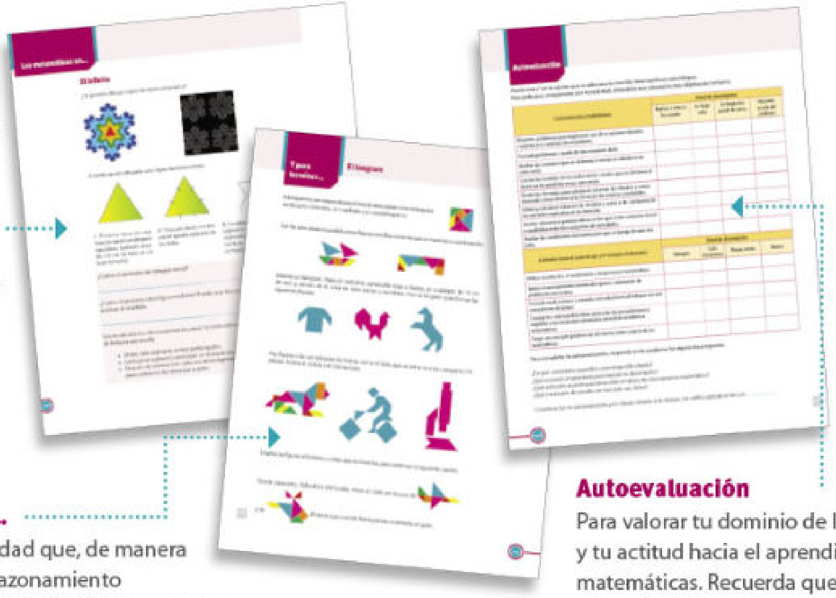


Evaluaciones de contenidos
Reactivos de opción múltiple para repasar, consolidar y evaluar lo que sabes hacer.

Evaluaciones tipo PISA
Podrás hacerlas de forma individual o en equipo. Es importante que, en cada una, justifiques tus respuestas y procedimientos desarrollados.

Guía de uso

Al finalizar cada bloque, encontrarás otras tres secciones.

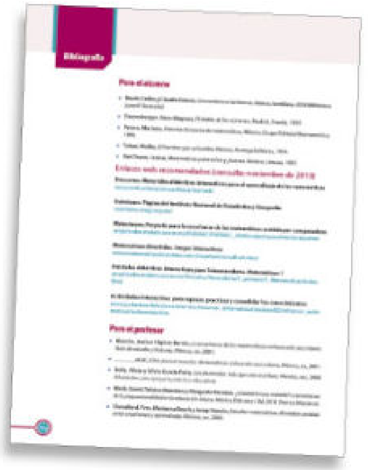


Las matemáticas en...
Se proponen situaciones de la vida cotidiana, la naturaleza, la música, y de otros ámbitos en los que, sorprendentemente, hay un conocimiento matemático implicado.

Y para terminar...
Contiene una actividad que, de manera lúdica, fomenta el razonamiento matemático en la resolución de problemas.

Autoevaluación
Para valorar tu dominio de los contenidos y tu actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas. Recuerda que, si resuelves esta actividad con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Al final del libro, encontrarás las siguientes secciones.



Glosario
Definiciones útiles que utilizarás en las secuencias didácticas.

Bibliografía para el profesor
Sugerencias de bibliografía y enlaces web para el profesor.

Bibliografía para el alumno
Te proponemos algunas referencias bibliográficas y sitios web para que repases y consolides tus aprendizajes.

Presentación para el profesor

Presentamos el enfoque didáctico que rigió la elaboración de las secuencias de lecciones de *Conect@ Estrategias. Matemáticas* y, enseguida, la estructura de los libros.

El enfoque didáctico

La serie *Conect@ Estrategias. Matemáticas* busca propiciar de manera significativa el desarrollo de las siguientes competencias.

1. Resolver problemas de manera autónoma
2. Comunicar información matemática
3. Validar procedimientos y resultados
4. Manejar técnicas eficientemente

A continuación se explica en qué consiste cada una y cómo se llevarán a cabo.

Resolver. Los enfoques contemporáneos para la enseñanza de las matemáticas tienden a coincidir en que, para lograr el aprendizaje significativo de un conocimiento, es necesario que éste aparezca como respuesta a una pregunta o como solución a una problemática que los estudiantes ya hayan afrontado. Se considera también que, en muchos casos, al afrontar una problemática adecuadamente, los alumnos desarrollan por sí mismos conocimientos aproximados al ideal.

Por ello, las lecciones de *Conect@ Estrategias. Matemáticas* comienzan con el planteamiento de uno o varios problemas. Sólo después, y paulatinamente, se presenta la información relativa al conocimiento tratado.

¿Cómo solucionarán los estudiantes un problema si todavía no se les enseña el conocimiento que lo resuelve? Los problemas que se plantean antes de dar información suficiente han sido diseñados o seleccionados para que puedan resolverlos aunque no dispongan de la herramienta óptima. Esto significa que tal vez se aproximen a la solución con herramientas más elementales, o bien, que aun cuando no puedan resolverlos identifiquen una limitación en sus conocimientos previos y la necesidad de uno nuevo.

Después de analizar los problemas iniciales, conforme se introducen aspectos del nuevo conocimiento, es conveniente que los estudiantes resuelvan más problemas y ejercicios para aplicar dichos aspectos y afirmarlos. Cuando usted lo considere necesario, puede complementar los problemas y ejercicios de aplicación que se proponen con otros que diseñe o tome de otros materiales.

Comunicar. Al resolver problemas, los conocimientos se generan muchas veces de manera silenciosa, implícita, al menos parcialmente. Por ello, una fase importante en los procesos de aprendizaje de nociones matemáticas consiste en explicitar esos conocimientos, nombrarlos, representarlos y, también, adoptar convenciones.

Para dar lugar a la diversidad de procesos relacionados con la comunicación, en *Conect@ Estrategias. Matemáticas* se apela a varios recursos: en cada lección se propone el trabajo en parejas o equipos, o la modalidad de una puesta en común de procedimientos y resultados. En esos momentos los estudiantes construyen formulaciones con sus propias palabras y aprenden de sus compañeros. Cabe recordar que diferentes formas de resolución ponen en juego distintas relaciones entre los datos, y conocer y analizar la resolución de otros datos ayuda a comprender mejor algunas nociones, a considerarlas desde distintos puntos de vista. Las puestas en común también constituyen el momento ideal para que usted introduzca las formas convencionales de representación.

Además, para atender a la necesidad de crear un lenguaje matemático y perfeccionar su uso, se proponen situaciones en las que, como parte integral de una tarea matemática, los estudiantes deben comunicar algo a alguien, como dar instrucciones para construir una figura geométrica.

Otro aspecto más que suele vincularse con la capacidad de comunicación es la posibilidad de expresar ideas matemáticas e interpretarlas en distintos tipos de representación: gráfica tabular, numérica, geométrica y algebraica, entre otros.

Validar. ¿Cómo se sabe, en clase de Matemáticas, qué es correcto y qué es incorrecto? ¿Quién lo decide? Otra característica fundamental del quehacer matemático es el desarrollo de formas de probar que algo es correcto, verdadero. A la vez, esta característica ofrece una oportunidad formativa única: se trata de que usted ponga en manos de los estudiantes los medios para que aprendan a determinar la validez de sus procedimientos y resultados.

No es cuestión todavía de enseñar a los estudiantes a que hagan demostraciones formales, pero sí de que sientan la necesidad de probar las aserciones con los recursos que tengan a la mano. En *Conect@ Estrategias. Matemáticas* se proponen dos maneras de validar.

• Mediante una prueba empírica. Por ejemplo, la manera empírica de apreciar si las medidas de una figura a escala son correctas consiste en comparar visualmente su forma con la original; la prueba empírica de que un número es solución de una ecuación consiste en sustituir el valor en la ecuación y comprobar si se obtiene una igualdad. Estas maneras de "probar" se nombran, frecuentemente, como verificar. Las pruebas claramente no son demostraciones, pero juegan un papel importante en los procesos de búsqueda, al permitir que los estudiantes pongan a prueba conjeturas, razonamientos.

• Por medio de validación semántica. Su principal característica es que se basa en argumentos; por ejemplo: "la suma de dos números impares es par, puesto que si restas una unidad a cada uno, obtienes dos números pares, y además, un dos…". Se espera que, conforme avanzan en el conocimiento de los distintos temas, los estudiantes puedan hacer este tipo de validaciones con más frecuencia.

Manejar técnicas. El desarrollo de técnicas y su aplicación en la resolución de problemas constituye otra característica del trabajo en matemáticas. En *Conect@ Estrategias. Matemáticas* se ha puesto especial cuidado en la diversidad de técnicas por varias razones: ocurre con frecuencia que las técnicas más rápidas o más elaboradas para resolver ciertos problemas parecen fáciles de utilizar, pero son difíciles de comprender (por ejemplo, el algoritmo de la multiplicación por decimales o la regla de tres); tal dificultad hace que los estudiantes tengan poco control sobre su uso y, en consecuencia, alteren los pasos. Otras

técnicas, en cambio, aunque más precarias por ser más largas o menos sistemáticas, son más fáciles de comprender; incluso, en ocasiones, las pueden establecer por sí mismos. Estas técnicas cumplen varias funciones: ayudan a consolidar la comprensión del tema; en ciertos casos, algunas son más económicas que la técnica más avanzada; y además, constituyen una herramienta "de emergencia" para los casos en que olviden la más avanzada. A final de cuentas, ¿qué procedimiento es mejor? Esto depende tanto del tipo de problema como de los conocimientos de quien resuelve. Por ello, los estudiantes que han desarrollado varios procedimientos tienden a ser más exitosos en la resolución de problemas.

Estructura y otras características de la obra

El libro está organizado en cinco bloques; en cada uno hay contenidos de los tres ejes temáticos. Las lecciones se agrupan en secuencias didácticas de entre dos y cinco lecciones cada una. En cada secuencia se presenta un aspecto nuevo de un tema, se desarrolla y se cierra, lo que no impide que en otro grupo de lecciones se retome algún punto del mismo tema.

Además, como apoyo a su labor docente, hemos pensado en algunos elementos dirigidos a un aspecto en específico.

• Para la planificación de la enseñanza incluimos una propuesta de dosificación de las lecciones. En ésta se consideró que algunas lecciones son más complejas que otras, y la revisión de su contenido puede requerir dos o hasta tres clases.

• Para la evaluación continua indicamos, en el índice, los contenidos (conocimientos y habilidades) con el fin de facilitar su identificación y seguimiento.

Esperamos que *Conect@ Estrategias. Matemáticas 3* constituya un apoyo en sus clases, una herramienta que enriquezca su acervo matemático y didáctico, y, sobre todo, que se convierta en una fuente de aprendizaje y experiencias significativas para los estudiantes.

Los autores

Ya que el tiempo que dedica a cada secuencia depende, en gran parte, de su forma de trabajo y de las características de sus grupos, esta tabla es una propuesta que usted podrá modificar de acuerdo con el ritmo del grupo, las fechas de entrega de calificaciones y las eventualidades (suspensiones, juntas, etc.) que surjan. En aquellas semanas en que el tiempo lo permita, podrá trabajar las actividades de "Las matemáticas en…", así como "Y para terminar…", o bien,

BLOQUES	SEMANAS 1	2	3	4
1	**Secuencia 1** Problemas con ecuaciones cuadráticas (lecciones 1-3)	**Secuencia 2** Figuras congruentes o semejantes (lecciones 4-7)	**Secuencia 3** Criterios de congruencia y semejanza (lecciones 8-10)	**Secuencia 4** Representaciones de relaciones de proporcionalidad (lecciones 11-13)
2	**Secuencia 1** Resolución por factorización de ecuaciones cuadráticas (lecciones 26-28)	**Secuencia 2** Rotación y traslación de figuras (lecciones 29-31)	**Secuencia 3** Construcción de diseños con simetría axial, central, rotación y traslación (lecciones 32-33)	**Secuencia 4** Cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo (lecciones 34-35)
3	**Secuencia 1** Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas (lecciones 40-42)	**Secuencia 2** Problemas de criterio y semejanza de triángulos (lecciones 43-45)	**Secuencia 3** Teorema de Tales (lecciones 46-49)	**Secuencia 3** Teorema de Tales (lecciones 46-49) **Secuencia 4** Construcción de figuras homotéticas (lecciones 50-53)
4	**Secuencia 1** Expresión general cuadrática para el enésimo término de una sucesión (lecciones 61-63)	**Secuencia 2** Cuerpos que se generan al girar, sobre un eje, desarrollos planos (lecciones 64-66)	**Secuencia 3** Pendiente de una recta; ángulo que se forma con la abscisa y el cociente de los catetos (lecciones 67-69)	**Secuencia 4** Relaciones entre ángulos agudos y cocientes de los lados de un triángulo (lecciones 70-71)
5	**Secuencia 1** Ecuaciones lineales y cuadráticas, o sistemas de ecuaciones para resolver problemas (lecciones 81-82)	**Secuencia 2** Fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos (lecciones 83-84)	**Secuencia 3** Secciones que se obtienen al hacer cortes a un cilindro o a un cono recto (lecciones 85-86)	**Secuencia 4** Cálculo del volumen de cilindros y conos (lecciones 87-88)

En el bloque 5, se trabaja primero con las fórmulas para calcular el volumen de conos y cilindros (secuencia 2), pues éstas se retoman en la secuencia 3 para calcular volúmenes de conos truncos y matraces cónicos.

adelantar el trabajo de otros contenidos, si considera que no es suficiente el tiempo asignado en la tabla.
Los colores de la tabla señalan el eje al que corresponde cada contenido: en azul, el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico; en anaranjado, Forma, espacio y medida; y en verde, Manejo de la información. Cabe decir que la redacción de los contenidos ha sido simplificada.

BLOQUES	SEMANAS 5	6	7	8	9
1	**Secuencia 5** Relaciones de variación cuadrática (lecciones 14-17)	**Secuencia 6** Eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes (lecciones 18-22)	**Secuencia 6** (lecciones 18-22) **Secuencia 7** Población de estudio y muestreo (lecciones 23-25)	**Secuencia 7** Población de estudio y muestreo (lecciones 23-25)	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación** (páginas 70-74)
2	**Secuencia 5** Teorema de Pitágoras (lecciones 36-37)	**Secuencia 6** Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y complementarios (lecciones 38-39)	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación** (páginas 108-112)		
3	**Secuencia 4** Construcción de figuras homotéticas (lecciones 50-53)	**Secuencia 5** Gráficas de funciones cuadráticas (lecciones 54-56)	**Secuencia 6** Gráficas formadas por rectas y curvas (lecciones 57-58)	**Secuencia 7** Probabilidad de eventos independientes (lecciones 59-60)	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación** (páginas 160-164)
4	**Secuencia 5** Razones trigonométricas, seno, coseno y tangente (lecciones 72-74)	**Secuencia 6** Razón de cambio de procesos con funciones lineales (lecciones 75-77)	**Secuencia 7** Desviación media y rango como medidas de dispersión (lecciones 78-80)	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación** (páginas 210-214)	
5	**Secuencia 5** Variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades (lecciones 89-90)	**Secuencia 6** Condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo (lecciones 91-92)	**Evaluación de contenidos** **Evaluación tipo PISA** **Autoevaluación** (páginas 244-248)		

Índice

Presentación para el alumno 3
Guía de uso 4
Presentación para el profesor 7
Dosificación 10

BLOQUE 1						16
Lección	**Título**	**Página**	**Contenido**	**Tema**	**Eje**	
Lección 1	Áreas y ecuaciones	18	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas	Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico	
Lección 2	El número desconocido	20				
Lección 3	El camino de regreso	22				
Lección 4	¿Son iguales?	24	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades	Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida	
Lección 5	El menor número de preguntas	26				
Lección 6	La razón de semejanza	28				
Lección 7	Rompecabezas	30				
Lección 8	Figuras congruentes	32	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada			
Lección 9	Condiciones necesarias y suficientes	34				
Lección 10	¿Son semejantes?	36				
Lección 11	Tablas de valores y gráficas	38	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad	Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información	
Lección 12	Tarifas telefónicas	40				
Lección 13	Tiempo, distancia, velocidad	42				
Lección 14	Un nuevo tipo de variación	44	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas			
Lección 15	Planes de ahorro I	46				
Lección 16	Planes de ahorro II	48				
Lección 17	Planes de ahorro III	50				
Lección 18	Laberinto de tubos	52	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes	Nociones de probabilidad		
Lección 19	La ruleta I	54				
Lección 20	La ruleta II	56				
Lección 21	¿El resultado depende de los anteriores?	58				
Lección 22	Dependientes o independientes	60				
Lección 23	Preguntas adecuadas y no tan adecuadas	62	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación	Análisis y representación de datos		
Lección 24	La presentación más adecuada	64				
Lección 25	Comunicación de resultados	66				
Las matemáticas en los mapas						68
Evaluación de contenidos						70
Evaluación (TIPO PISA)						72
Autoevaluación						74
Y para terminar...						75

Índice

BLOQUE 2						76
Lección	**Título**	**Página**	**Contenido**	**Tema**	**Eje**	
Lección 26	La técnica de factorización I	78	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización	Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico	
Lección 27	La técnica de factorización II	80				
Lección 28	La técnica de factorización III	82				
Lección 29	Trasladar figuras	84	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras	Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida	
Lección 30	Rotar figuras	86				
Lección 31	Transformaciones equivalentes	88	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras			
Lección 32	Figuras en movimiento	90				
Lección 33	Diseños con transformaciones	92				
Lección 34	Teorema de Pitágoras	94	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo	Medida		
Lección 35	Mostrar o demostrar	96				
Lección 36	Dos lados conocidos y uno desconocido	98	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras			
Lección 37	Problemas diversos	100				
Lección 38	Que caiga tres, que no caiga tres	102	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)	Nociones de probabilidad	Manejo de la información	
Lección 39	Pelotas rojas o juguetes azules	104				
Las matemáticas en una tira de papel						106
Evaluación de contenidos						108
Evaluación (TIPO PISA)						110
Autoevaluación						112
Y para terminar...						113

BLOQUE 3						114
Lección	**Título**	**Página**	**Contenido**	**Tema**	**Eje**	
Lección 40	Una fórmula útil	116	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones	Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico	
Lección 41	¿Cuántas soluciones?	118				
Lección 42	Algunos problemas	120				
Lección 43	Congruencia y cuadriláteros	122	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas	Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida	
Lección 44	¿Cuánto mide el poste?	124				
Lección 45	Calcular distancias	126				
Lección 46	Paralelas y segmentos proporcionales	128	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales			
Lección 47	El teorema de Tales y sus aplicaciones	130				
Lección 48	Triángulos, hilo, palillos y algo más I	132				
Lección 49	Triángulos, hilo, palillos y algo más II	134				
Lección 50	Sombras y otras proyecciones	136	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas			
Lección 51	Homotecias fraccionarias y negativas	138				
Lección 52	Cambiar el centro de homotecia	140				
Lección 53	Más sobre homotecia	142				

Índice

Lección	Título	Página	Contenido	Tema	Eje
Lección 54	Curvas en el plano	144	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos	Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información
Lección 55	Gráficas cuadráticas	146			
Lección 56	En movimiento	148			
Lección 57	Llenado de botellas	150	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera		
Lección 58	El movimiento en gráficas	152			
Lección 59	Dados y pelotas	154	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)	Nociones de probabilidad	
Lección 60	Que sea pulsera, y que sea azul	156			

Las matemáticas en el infinito 158
Evaluación de contenidos 160
Evaluación (TIPO PISA) 162
Autoevaluación 164
Y para terminar... 165

BLOQUE 4 166

Lección	Título	Página	Contenido	Tema	Eje
Lección 61	Figuras con palillos	168	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión	Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Lección 62	Sucesiones con figuras	170			
Lección 63	Sucesiones cuadráticas	172			
Lección 64	Girar una figura produce otra figura	174	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos	Figuras y cuerpos	Forma, espacio y medida
Lección 65	¿Cómo se hace un cilindro?	176			
Lección 66	¿Cómo se construye un cono?	178			
Lección 67	Ángulo de inclinación y pendiente	180	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente	Medida	
Lección 68	Triángulos rectángulos en el plano	182			
Lección 69	Más ejercicios sobre tangente y pendiente	184			
Lección 70	Semejanza y cocientes	186	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo		
Lección 71	Los cocientes coinciden	188			
Lección 72	Seno, coseno y tangente	190	Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente		
Lección 73	Calcular ángulos	192			
Lección 74	El saber da poder	194			
Lección 75	La velocidad como razón de cambio	196	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa	Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información
Lección 76	Variaciones de temperatura	198			
Lección 77	La pendiente como razón de cambio	200			
Lección 78	El mejor horno	202	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión	Análisis y representación de datos	
Lección 79	Desviación media	204			
Lección 80	Anestesia y otros problemas	206			

Las matemáticas en una hoja de papel 208
Evaluación de contenidos 210
Evaluación (TIPO PISA) 212

Índice

Autoevaluación 214
Y para terminar... 215

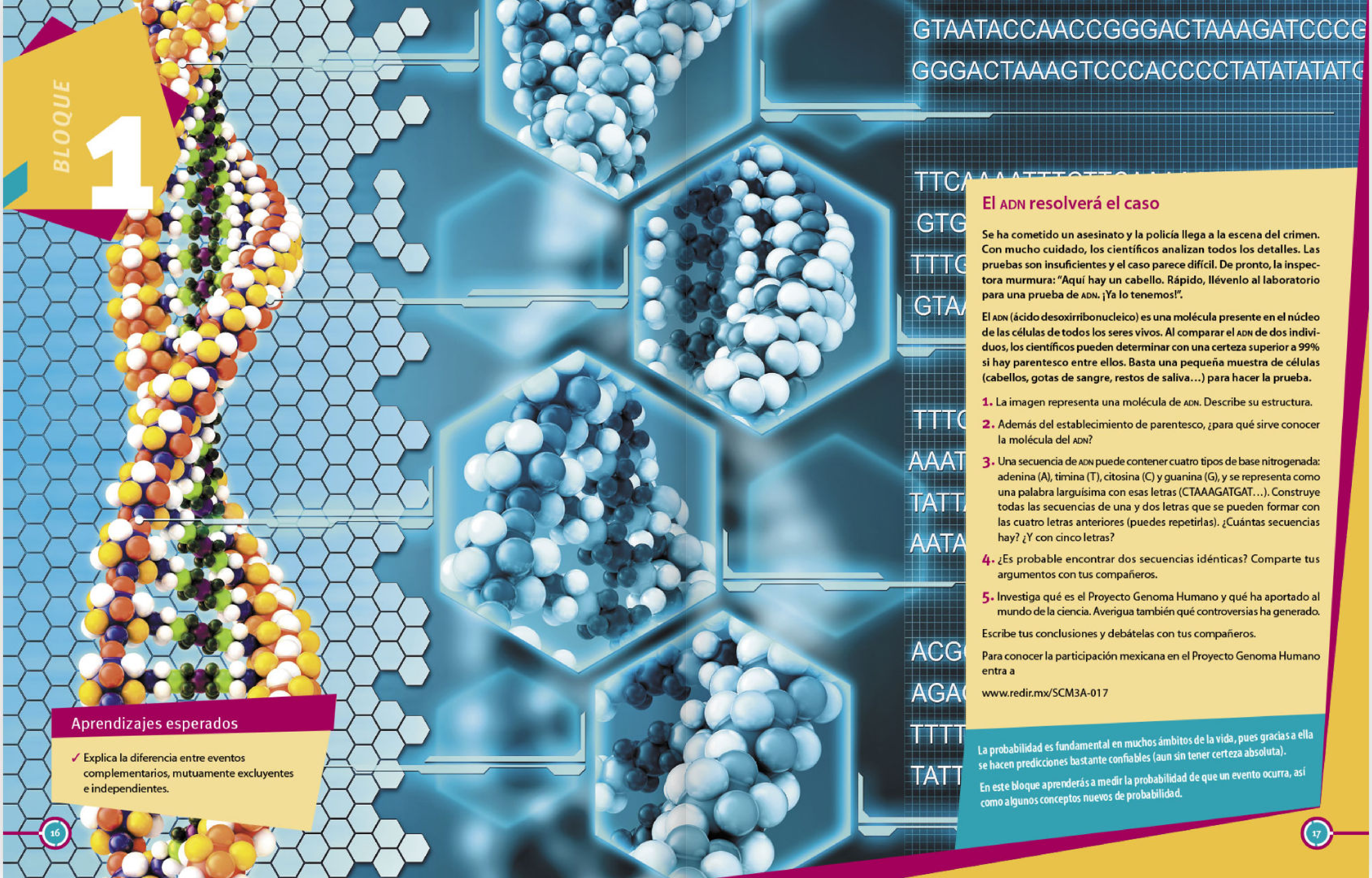
BLOQUE 5 216

Lección	Título	Página	Contenido	Tema	Eje
Lección 81	La traducción de los problemas	218	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada	Patrones y ecuaciones	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Lección 82	De todo un poco	220			
Lección 83	El volumen del cilindro	222	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides	Medida	Forma, espacio y medida
Lección 84	Un cono a la medida	224			
Lección 85	Cortes con formas inesperadas	226	Análisis de las secciones que se obtienen al efectuar cortes a un cilindro o un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto		
Lección 86	Recipientes cónicos	228			
Lección 87	Volúmenes y capacidades	230	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas		
Lección 88	Cilindros y conos imaginarios	232			
Lección 89	Cantidades que cambian y se relacionan	234	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	Proporcionalidad y funciones	Manejo de la información
Lección 90	Índice de Masa Corporal	236			
Lección 91	Juegos equitativos I	238	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables	Nociones de probabilidad	
Lección 92	Juegos equitativos II	240			

Las matemáticas en reflectores parabólicos 242
Evaluación de contenidos 244
Evaluación (TIPO PISA) 246
Autoevaluación 248
Y para terminar... 249

Anexo 250
Glosario 252
Bibliografía para el alumno 254
Bibliografía para el profesor 254
Bibliografía consultada 256
Créditos iconográficos 256

BLOQUE 1



Aprendizajes esperados

✓ Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El ADN resolverá el caso

Se ha cometido un asesinato y la policía llega a la escena del crimen. Con mucho cuidado, los científicos analizan todos los detalles. Las pruebas son insuficientes y el caso parece difícil. De pronto, la inspectora murmura: "Aquí hay un cabello. Rápido, llévenlo al laboratorio para una prueba de ADN. ¡Ya lo tenemos!".

El ADN (ácido desoxirribonucleico) es una molécula presente en el núcleo de las células de todos los seres vivos. Al comparar el ADN de dos individuos, los científicos pueden determinar con una certeza superior a 99% si hay parentesco entre ellos. Basta una pequeña muestra de células (cabellos, gotas de sangre, restos de saliva…) para hacer la prueba.

1. La imagen representa una molécula de ADN. Describe su estructura.
2. Además del establecimiento de parentesco, ¿para qué sirve conocer la molécula del ADN?
3. Una secuencia de ADN puede contener cuatro tipos de base nitrogenada: adenina (A), timina (T), citosina (C) y guanina (G), y se representa como una palabra larguísima con esas letras (CTAAAGATGAT…). Construye todas las secuencias de una y dos letras que se pueden formar con las cuatro letras anteriores (puedes repetirlas). ¿Cuántas secuencias hay? ¿Y con cinco letras?
4. ¿Es probable encontrar dos secuencias idénticas? Comparte tus argumentos con tus compañeros.
5. Investiga qué es el Proyecto Genoma Humano y qué ha aportado al mundo de la ciencia. Averigua también qué controversias ha generado.

Escribe tus conclusiones y debátelas con tus compañeros.

Para conocer la participación mexicana en el Proyecto Genoma Humano entra a

www.redir.mx/SCM3A-017

La probabilidad es fundamental en muchos ámbitos de la vida, pues gracias a ella se hacen predicciones bastante confiables (aun sin tener certeza absoluta).

En este bloque aprenderás a medir la probabilidad de que un evento ocurra, así como algunos conceptos nuevos de probabilidad.

BLOQUE 1

Secuencia 1 / lección 1

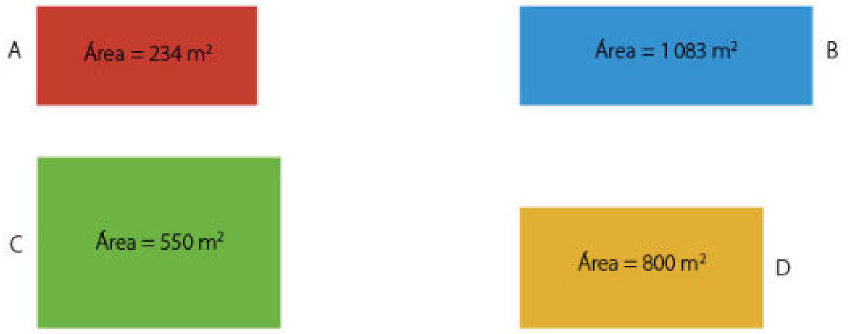
Áreas y ecuaciones

CONTENIDO Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

Seguramente has notado que las ecuaciones de primer grado resultan útiles para resolver algunos problemas; sin embargo, en algunos casos es necesario usar otro tipo de ecuaciones, las cuales conocerás en esta secuencia.

1. Trabaja en equipo. Analicen la información de cada rectángulo. En cada caso, averigüen y anoten cuánto miden los lados de la figura. Usen la estrategia que prefieran y, si lo requieren, verifiquen las respuestas con calculadora.

   Rectángulo A: el largo mide 5 metros más que el ancho.
   Rectángulo B: el largo mide el triple del ancho.
   Rectángulo C: el ancho mide 3 metros menos que el largo.
   Rectángulo D: el ancho mide la mitad del largo.



- Verifiquen, en grupo y con ayuda del profesor, que las medidas encontradas sean correctas por dos razones:
  a) al multiplicarlas se obtiene el área;
  b) al compararlas se cumple la relación que se indica; por ejemplo, en el rectángulo A, el largo mide 5 m más que el ancho.

2. Las relaciones entre los lados de los rectángulos a veces se expresan con literales. Por ejemplo, si el ancho del rectángulo A mide x, ¿cuánto medirá el largo? ________ Entonces el área quedará expresada como $x(x + 5)$, ¿por qué? ____________________

3. Escriban la ecuación que relaciona las medidas de los lados de cada rectángulo con su área y simplifíquenla, como se hizo con la figura A. Si proponen diferentes ecuaciones, analicen por qué.

   Rectángulo A: $x(x + 5) = 234$ $\qquad$ $x^2 + 5x = 234$

   Rectángulo B:

   Rectángulo C:

   Rectángulo D:

4. Verifiquen, en cada caso, que el valor encontrado para la incógnita x en la actividad 1 satisfaga la ecuación correspondiente.

   A: $x^2 + 5x = 234$ $\qquad$ $(13)^2 + 5(13) = (169) + (65) = 234$
   B:
   C:
   D:

   a) Las ecuaciones anteriores se denominan *ecuaciones de segundo grado*. Expliquen por qué suponen que reciben ese nombre y qué las distingue de las de primer grado.

   ____

- Comparen sus respuestas con las de los demás equipos. Redacten, en el pizarrón y con base en sus explicaciones de por qué las ecuaciones de segundo grado reciben ese nombre, una explicación común que convenza a todos.

5. Formulen una ecuación de segundo grado que corresponda a cada problema y resuélvanla con los procedimientos que usan para las ecuaciones de primer grado. Si resultan insuficientes, obtengan las soluciones por tanteo.

   a) El área de un cuadrado es 182.25 m². ¿Cuánto mide cada lado?

   Ecuación: ____________ Medida de un lado: ____________

   b) El área de un rectángulo es 400 m². Si el largo mide el cuádruple del ancho, ¿cuáles son sus medidas?

   Ecuación: ____________ Largo: ____________

   Ancho: ____________

   c) El área de un rombo es 169 m². Si la diagonal mayor mide el doble de la menor, ¿cuánto mide cada una?

   Ecuación: ____________ Medida de la diagonal mayor: ____________

   Medida de la diagonal menor: ____________

- Lean, en grupo, la siguiente información. Encuentren otra solución para la ecuación de segundo grado e intenten hallar el valor de x para la ecuación de tercer grado.

Una ecuación como $x^2 + 3x = 130$ es de segundo grado porque el mayor exponente de la incógnita es dos. En cambio, la ecuación $x^3 + 2 = 10$ es de tercer grado, pues el mayor exponente de la incógnita es tres.
Un número que satisface la ecuación $x^2 + 3x = 130$ es −13, porque…
$(-13)^2 + 3(-13) = 169 - 39 = 130.$

conect@mos

Practica las ecuaciones de segundo grado en www.redir.mx/SCM3A-019

Lee la información y contesta las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, la expresión algebraica que se te haya dificultado más.

Una pista

¿Qué relación hay entre el área de un rombo y el producto de sus diagonales?

BLOQUE 1

Secuencia 1 / lección 2

El número desconocido

CONTENIDO
Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

1. Reúnete con algunos compañeros para resolver los siguientes problemas. Planteen una ecuación para cada problema y anótenla en la columna de la derecha. Después inventen un problema similar a los aquí planteados y escríbanlo en el último renglón.

Problemas	Ecuaciones
Si al cuadrado de un número se le suma 11, se obtiene como resultado 92. ¿Qué número es?	
Si al cuadrado de un número se le resta 15, se obtiene 106. ¿Qué número es?	
Un número y su cuadrado suman 182. ¿De qué número se trata?	
Si al cuadrado de un número se le resta el mismo número, se obtiene 210.	
El cuadrado de un número y el doble del mismo suman 80. ¿Qué número es?	

2. Complementen la tabla de la actividad 1 con lo siguiente.

a) Escriban la solución de cada ecuación y problema.

b) Averigüen en qué casos el simétrico de la solución que encontraron también resuelve la ecuación.

c) En los casos en que el simétrico no solucione el problema, prueben con más números.

Ya sabemos...
El simétrico de 9 es −9; el simétrico de −5 es 5.

- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y verifiquen que todos los problemas de la activad 1 tengan dos soluciones. Después lean la siguiente información y contrástenla con lo trabajado en las actividades 1 y 2; en particular, verifiquen qué problemas tienen dos números simétricos como solución.

En una ecuación de segundo grado como $x^2 = 25$, una solución es 5, porque $5^2 = 25$. Sin embargo, −5 también es una solución, porque $(-5)^2 = 25$. Esto significa que las ecuaciones de segundo grado **pueden tener dos soluciones.** En ciertos casos las soluciones son dos números simétricos.

3. Una manera de resolver ecuaciones de segundo grado consiste en buscar, por ensayo y error, números que satisfagan la ecuación. Así, por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 3x = 28$ se puede usar una tabla como la siguiente.

x	x^2	$3x$	$x^2 + 3x$
1	1	3	4
2	4	6	10

a) En la tabla se aprecia que cuando x vale 1, $x^2 + 3x$ es igual a 4; cuando x vale 2, $x^2 + 3x$ es igual a 10. Prueben con otros valores de x hasta que $x^2 + 3x$ sea igual a 28.

b) Hay un número negativo que también satisface la ecuación $x^2 + 3x = 28$. Encuéntrenlo haciendo una tabla similar en su cuaderno.

c) La ecuación $x^2 + 3x = 28$ tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa. Anótenlas.

$x_1 =$ $x_2 =$

4. Encuentren las soluciones de cada ecuación.

a) $5x^2 = 45$ b) $4x^2 = 1$

c) $x^2 + x = 56$ d) $x^2 - x - 56 = 0$

e) $x^2 - 13x = 0$ f) $x^2 + 9x = 0$

Convivimos
Cuando resuelvas una ecuación, verifica la respuesta. Si se cumple la igualdad, estarás seguro de que tu procedimiento y solución son correctos, lo cual te brindará confianza en los conocimientos que has adquirido. Cuando tengas dudas, pregunta a tu profesor.

Reflexionamos
Cuando se tiene una ecuación como $x^2 = 9$, ¿qué operación se aplica en ambos lados de la igualdad para simplificar y obtener la ecuación equivalente $x = 3$?

- Comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Noten que, en las ecuaciones de la actividad 4, hay dos cuyas soluciones son números simétricos. Identifíquenlas y comenten qué otra cosa tienen en común que las distingue del resto.

Secuencia 1 / lección 3

El camino de regreso

CONTENIDO
Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

1. **Trabaja en equipo. Analicen el siguiente problema y hagan en su cuaderno lo que se indica.**

Una caja contiene tantos paquetes como galletas hay en cada paquete; además hay 18 galletas sueltas, por lo que se obtiene un total de 643 galletas. ¿Cuántas galletas hay en cada paquete?

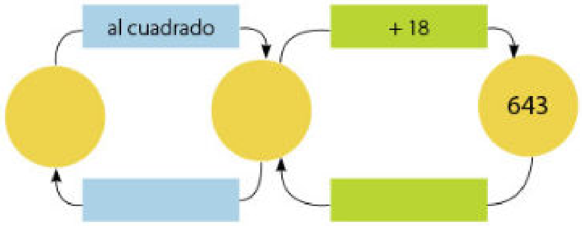
a) Subrayen la ecuación con la que se resuelve el problema.

$2x^2 - 18 = 643$ $2x^2 + 18 = 643$ $x^2 + 18 = 643$ $x^2 - 18 = 643$

b) En la ecuación que subrayaron, ¿qué significados tiene la variable x, según el problema? ¿Por qué aparece elevada a la potencia 2?

c) Con base en la ecuación que subrayaron, escriban qué operaciones aplicarían al número x para obtener como resultado 643. Según el problema planteado, expliquen qué representa cada número y cada operación.

d) Una manera de obtener el valor de x consiste en partir del resultado y aplicar operaciones inversas. Completen el diagrama. Inicien en el recuadro de color verde que se encuentra vacío.



2. **Lean la siguiente información y hagan lo que se indica.**

Al igual que sucede con las ecuaciones lineales, una manera de hallar la solución de una ecuación de segundo grado es simplificarla mediante operaciones inversas, hasta que resulte evidente el valor de la incógnita. A este proceso se le llama **despejar la incógnita**. Por ejemplo:

$$x^2 + 13 = 49$$
$$x^2 + 13 - 13 = 49 - 13$$
$$x^2 = 36$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

a) Resuelvan la ecuación de la actividad 1 utilizando el procedimiento descrito en el recuadro anterior.
b) Relacionen este procedimiento con el diagrama presentado en el inciso d.

* **Con el resto del grupo, analicen sus respuestas de las actividades 1 y 2. En particular, corroboren que todos comprendan el procedimiento de las operaciones inversas.**

3. **Analiza el siguiente problema y haz en tu cuaderno lo que se indica.**
En un teatro, la cantidad de filas es el doble de la de butacas en cada fila. Además hay 50 localidades de balcón, lo que representa un total de 850 asientos. ¿Cuántas butacas hay en cada fila? ¿Cuántas filas tiene el auditorio?

a) Subraya la ecuación con la que se resuelve el problema.

$x^2 - 50 = 850$ $x^2 + 50 = 850$ $2x^2 - 50 = 850$ $2x^2 + 50 = 850$

b) En la ecuación que subrayaste, ¿qué significados tiene la variable x? ¿Por qué se eleva a la potencia 2? ¿Qué representa cada número y cada operación?

c) Halla el valor de x y verifica que cumpla las condiciones del problema.

¿Cuántas filas tiene el auditorio? ______ ¿Cuántas butacas hay en cada fila? ______

En contexto

Conoce más sobre el álgebra a partir de contextos cotidianos en *El álgebra es divertida*, de la Biblioteca Escolar.

Lamm, Emma y Elena de Oteyza, *El álgebra es divertida*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2009.

4. **Trabaja en equipo. Inventen un problema que pueda resolverse con la ecuación $x^2 + 7 = 151$. Resuélvanlo y verifiquen que la solución sea correcta.**

* **Con apoyo del profesor, analicen algunos de los problemas inventados; comprueben que cada uno se resuelva con la ecuación $x^2 + 7 = 151$ y que la solución cumpla las condiciones del problema.**

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones y contesta las preguntas en tu cuaderno.**

a) $x^2 = 36$ b) $a^2 = 12$ c) $x^2 - 8 = 28$ d) $n^2 = -144$
e) $-6m^2 = -150$ f) $m^2 + 7 = 88$ g) $n^2 - 5 = -4$ h) $8b^2 - 7 = 193$

» Una de las ecuaciones anteriores carece de solución. ¿Cuál es? Explica por qué.

6. **Trabaja en equipo. Seleccionen la ecuación que resuelve cada problema y encuentren su solución.**

a) Siete losetas cuadradas cubren un piso de 448 cm². ¿Cuánto mide el lado de cada una?

$n^2 + 7 = 448$ $n^2 - 7 = 448$ $7n^2 = 448$ $\frac{n^2}{7} = 448$

b) Uno más cuatro veces el cuadrado de un número es igual a 325. ¿Cuál es ese número?

$\frac{n^2}{4} + 1 = 325$ $4n^2 - 1 = 325$ $n^2 + 4 + 1 = 325$ $4n^2 + 1 = 325$

* **Con ayuda del profesor, revisen los resultados de los problemas; si hubo errores, expliquen a qué se debieron y corrijan lo necesario. Comenten la siguiente información y contrástenla con lo que trabajaron en esta lección.**

Las ecuaciones de segundo grado de esta lección son de la forma $ax^2 + c = 0$ y, como posiblemente has notado, se pueden resolver con operaciones inversas hasta rescribirlas en la forma

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

BLOQUE 1

Secuencia 2 / lección 4

¿Son iguales?

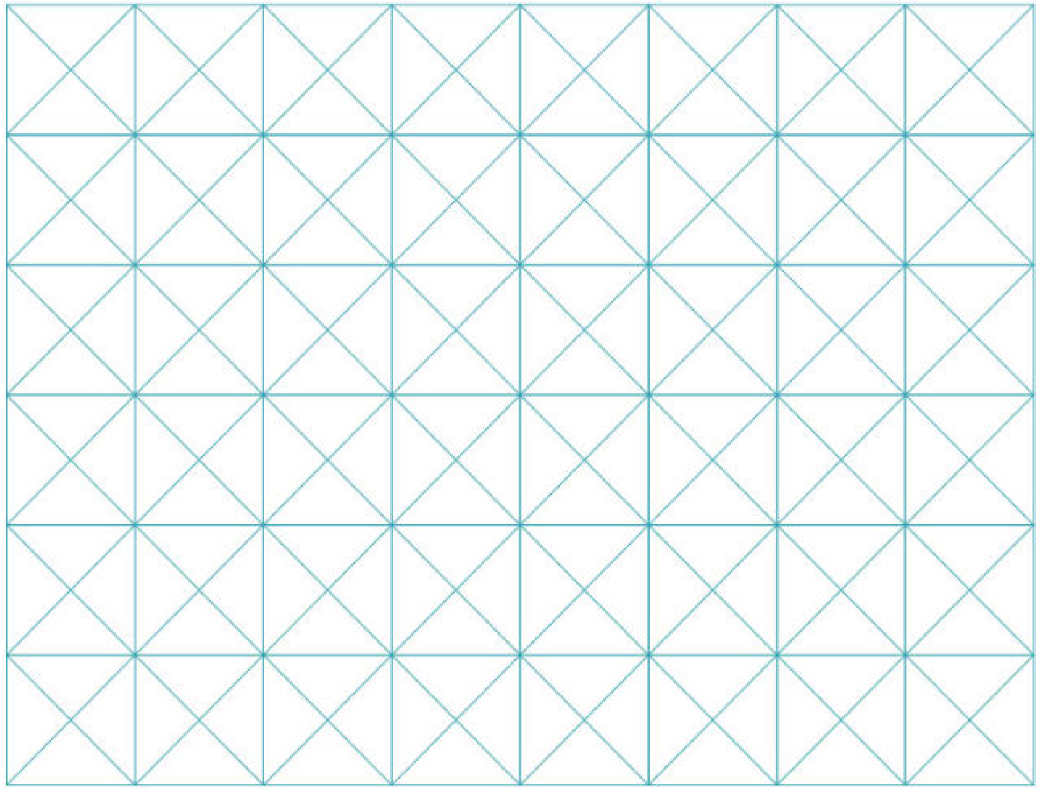
CONTENIDO Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

¿Cuándo se dice que dos figuras son iguales? ¿Cuándo se dice que no son iguales pero sí semejantes? Éstas son algunas de las cuestiones que estudiarás en esta secuencia.

Ya sabemos...

En geometría, las figuras iguales también se llaman congruentes. Dos figuras son congruentes si, al poner una encima de la otra, coinciden.

1. **Efectúa la siguiente actividad.**
   - » Traza, en la retícula de abajo, dos parejas de polígonos congruentes. Debes marcar los lados de los polígonos sobre las líneas de la retícula.
   - » Después reúnete en equipo con cuatro o cinco de tus compañeros. Muéstrales tus dos parejas de figuras para que, entre todos, evalúen si son o no congruentes.
   - » Cada pareja de figuras congruentes valdrá 60 puntos, pero si otro alumno del equipo presenta el mismo tipo de figuras, los puntos se dividirán entre dos (30 puntos para cada alumno); si tres alumnos presentan el mismo tipo de figuras, los puntos se dividirán entre tres (20 puntos para cada uno); y así sucesivamente.
   - » Si alguien del equipo afirma que dos figuras no son congruentes y el autor de estas no logra probar que sí lo son, esa pareja de figuras no valdrá ningún punto.
   - » Al final, gana quien obtenga más puntos.

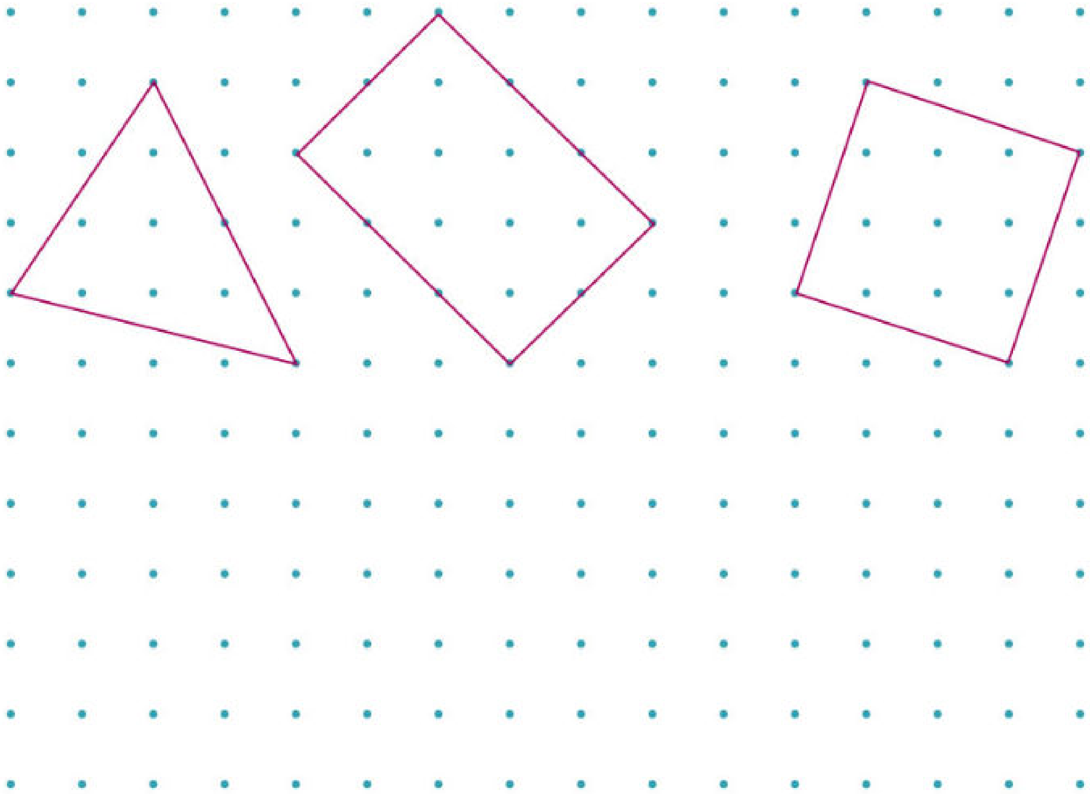


- Expliquen, en grupo y con ayuda de su profesor, cómo hicieron para verificar si dos figuras eran congruentes. Propongan un método para saber si dos polígonos son congruentes sin superponer las figuras y, de este modo, comprobar si coinciden. Es decir, digan qué características deben tener dos polígonos para ser congruentes. Anoten las conclusiones a las que lleguen.

Dos polígonos son congruentes cuando ____________________

____

2. **Traza, para cada figura de la retícula, otra figura congruente, pero dibújalas con una orientación diferente a la del ejemplo.**



- Compara tus respuestas con las de tus compañeros; si no están de acuerdo en que dos figuras sean congruentes o no, encuentren alguna manera de probarlo. Luego redacten, entre todos, un procedimiento para trazar una figura congruente con otra, pero que tenga distinta orientación.

____

____

Secuencia 2 / lección 5

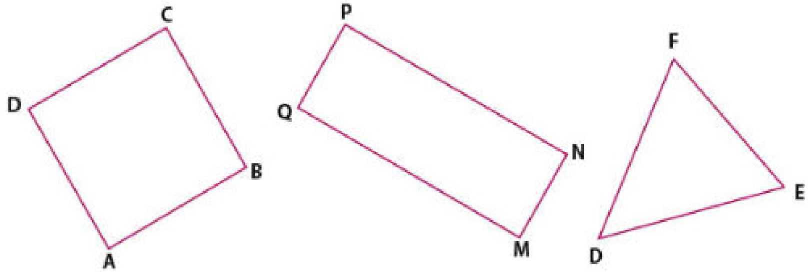
El menor número de preguntas

CONTENIDO: Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

1. **Organízate en equipos de tres o cuatro integrantes para jugar reproduce la figura.**
   - Cada equipo necesitará un juego de geometría, una hoja blanca para trazar su figura, y media hoja para escribir preguntas al profesor.
   - Su profesor tendrá un cuadrilátero irregular **ABCD** que nadie podrá ver, sino hasta el final.
   - Cada equipo, por medio de las preguntas que escriba, solicitará al profesor la información que necesite para trazar un cuadrilátero congruente con el que él oculta. Solamente pueden hacer preguntas que se contesten con una medida, por ejemplo, 15 cm; o con sí o no.
   - El profesor devolverá a cada equipo su hoja, con las respuestas a sus preguntas.
   - Los equipos trazarán el cuadrilátero con la información recibida.
   - Cuando todos hayan trazado su cuadrilátero, cada equipo superpondrá el suyo sobre el del profesor para ver si coinciden.
   - Los equipos cuyos cuadriláteros coincidan tendrán un punto, y aquellos que lo hayan logrado con el menor número de preguntas ganarán un punto extra.

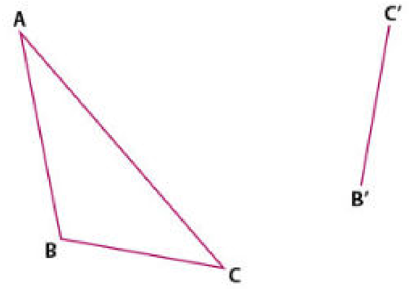
* **Analicen, entre todos, las preguntas de los diferentes equipos. Respondan en su cuaderno lo siguiente.**
   - ¿En qué fallaron las preguntas de quienes no lograron trazar un cuadrilátero congruente? ¿Les faltó información? ¿Cuál?
   - ¿Algunas de las preguntas de quienes sí lograron reproducir la figura fueron innecesarias? Es decir, ¿se podrían eliminar sin afectar el resultado?

2. **Traza, en tu cuaderno y con ayuda de tu juego de geometría, una figura congruente con cada una de las siguientes. Puedes dibujarlas en una posición diferente. Rotula cada vértice haciendo una correspondencia con las letras abajo señaladas; por ejemplo, A′, B′, C′, D′, etcétera.**



3. **Traza nuevamente las tres figuras anteriores, pero usa únicamente tu regla no graduada y el compás.**

4. **Señala, con ayuda de la regla no graduada y el compás, dónde debe ubicarse el punto A′ para que los triángulos A′B′C′ y ABC sean congruentes.**



* **Comenta, con el grupo y con ayuda del profesor, cómo trazaste las figuras de la actividad 3 usando solamente regla no graduada y compás. Comenten también cómo ubicaron el punto A′ de la actividad 4. Anoten en su cuaderno sus conclusiones.**

5. **Efectúa, en equipos, la siguiente actividad.**
Cada integrante del equipo trazará en su cuaderno los polígonos que se indican en la tabla. Antes de hacerlo acuerden, para cada caso, si todos los equipos deberán trazar figuras congruentes o si algunas pueden ser diferentes. Anoten en la tabla su resolución.

Polígono que debe trazarse	¿Será congruente con el de los demás equipos?
Un cuadrado con un lado de 3 cm	
Un cuadrado cuya diagonal mida 6 cm	
Un rectángulo con un lado de 4 cm	
Un rectángulo cuyo largo mida el doble que el ancho	
Un rectángulo cuyos lados midan 3 cm y 7 cm	
Un triángulo con dos ángulos de 70º, cuyo lado corto mida 3 cm	
Un triángulo cuyos ángulos midan 90º, 60º y 30º	
Un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 7 cm	

* **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten en grupo lo siguiente.**

¿Qué datos se necesitan para trazar un triángulo congruente con otro?

___

¿Y en el caso de un rectángulo?

___

¿Y para un cuadrado?

___

La razón de semejanza

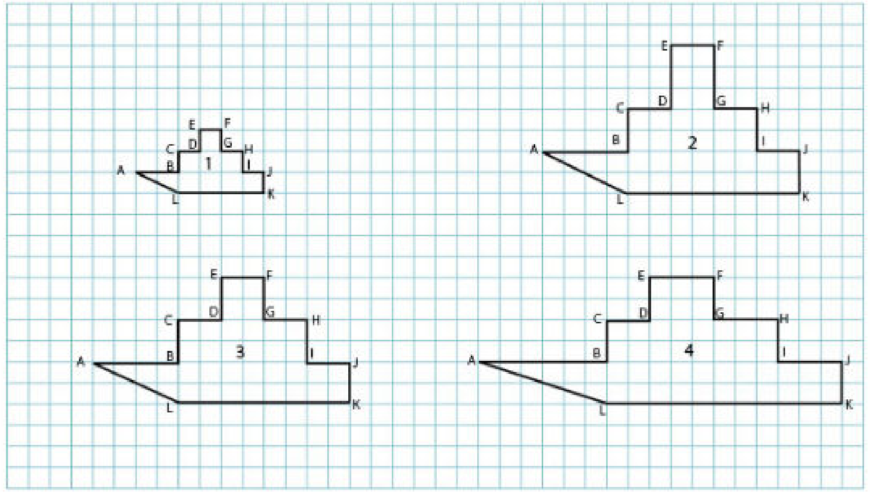
CONTENIDO Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

Ya sabemos...

Decir que las medidas de los lados son proporcionales significa que...
- si en una figura un lado a es igual a un lado b, en la otra figura ocurre lo mismo;
- si en una figura un lado a es dos, tres o *n* veces mayor que el lado b, en la otra figura, el lado correspondiente a a será ese mismo número de veces mayor que el correspondiente a b.

También significa que existe un número, siempre el mismo, que, multiplicado por la medida de los lados de una de las figuras, arroja las medidas de los lados de la otra.
Ese número se llama **constante de proporcionalidad, factor de escala o razón de semejanza.**

1. Anota una ✔ al lado de los barcos que son semejantes al 1 y un ✘ al lado de los que no.



2. Contesta las preguntas.

a) En el barco 1, **EFGD** es un cuadrado. ¿En qué barcos no sucede esto? ____________

b) ¿En qué barcos el ángulo **A** no es igual al del barco 1? ____________

c) De acuerdo con lo anterior, ¿qué figuras no son semejantes a la 1? ____________

____

d) De acuerdo con lo anterior, ¿qué características tienen los ángulos y los lados de dos figuras semejantes? Anota tu conclusión.

____

____

- Compara, en grupo, la manera en que cada quien describió las figuras semejantes. Después lean y comenten la siguiente información.

Cuando dos figuras son semejantes, los ángulos de una son **iguales** a los de la otra, y los lados de una son **proporcionales** a los lados de la otra.

e) ¿Cuál es el único barco semejante al 1? ________ ¿Qué factor de escala debe multiplicarse por las medidas del barco 1 para obtener las del barco semejante? ________

3. **Lleva a cabo lo siguiente.**

a) Traza en tu cuaderno un rectángulo **A**, en el que el largo sea el triple del ancho.

b) Un rectángulo **B** está a escala 2 a 1 respecto al rectángulo **A**, es decir, sus lados tienen el doble de tamaño. Subraya, sin trazar dicho rectángulo, la oración correcta.

En el rectángulo **B**…

» el largo es seis veces el ancho.
» el largo es tres veces el ancho.
» el largo es dos veces el ancho.

c) Traza el rectángulo **B** y verifica tu respuesta.

d) Traza en tu cuaderno un rectángulo **C** semejante al rectángulo **A**, pero con un factor de escala 4 a 1. ¿Qué relación tienen el largo y el ancho del rectángulo **C**?

____

e) ¿Son semejantes **C** y **B**? Argumenta tu respuesta en tu cuaderno.

Reflexionamos

Un cuadrado A mide 4 cm de lado y un cuadrado A', 8.3 cm de lado. ¿A y A' son semejantes?

Reflexionamos

¿Todos los rombos que tienen un ángulo de 30° son semejantes?

4. **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Después lean lo siguiente.**

La relación del doble que guardan los lados del rectángulo B con los del rectángulo A es una **razón de semejanza.** También lo es la relación 4 a 1 (del cuádruple) que guardan los lados del rectángulo C respecto a los del rectángulo A.

Por otra parte, en los tres rectángulos semejantes A, B y C el largo es tres veces el ancho. Esta razón existente entre dos partes de un mismo rectángulo se conserva en los demás rectángulos semejantes; no tiene un nombre especial.

5. **Investiga las medidas reales de una cancha de futbol o de basquetbol y traza en tu cuaderno una semejante. Elige la razón de semejanza que más te convenga.**

a) ¿Cuánto mide el largo real de la cancha? ____________

b) ¿Y el ancho? ____________

c) ¿Qué razón de semejanza elegiste? ____________

d) ¿Cuáles son las dimensiones de tu dibujo? ____________

- **Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 3, 4 y 5 con las de tus compañeros.**

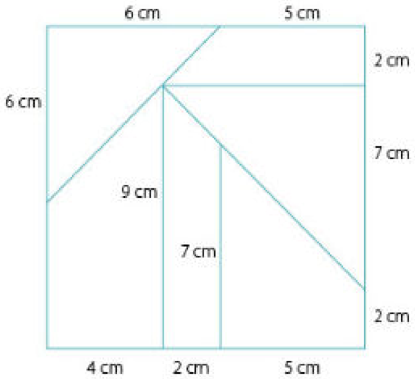
Secuencia 2 / lección 7

Rompecabezas

CONTENIDO
Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades

1. **Reúnete con dos o tres compañeros. Dibujen, en un pedazo de cartoncillo, un rompecabezas como el que aparece a continuación, con las medidas que se indican. Recorten las piezas y repártanselas.**[1]

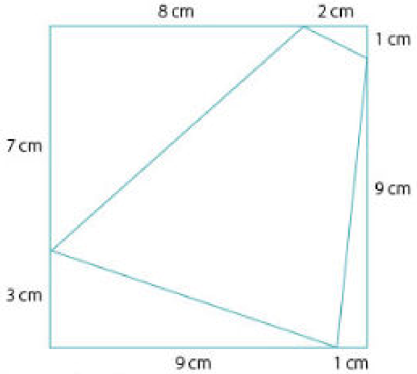
Cada uno amplíe, a una misma escala, las piezas que le corresponden, de manera que al reunirlas se forme un rompecabezas semejante al de la imagen, es decir, con la misma forma que el original pero más grande. Antes de fabricar las piezas, acuerden cómo lo harán.
El segmento que en el rompecabezas original mide 4 cm deberá medir 5 cm en la ampliación.



- **Armen el rompecabezas. Si las piezas no embonan, busquen, en grupo, el origen del error.**

2. **Elaboren una segunda copia del rompecabezas anterior. El lado que mide 5 cm en el original deberá medir ahora 8 cm en la copia. Comprueben que las piezas embonen.**

3. **Construyan el rompecabezas que se muestra a la derecha, recorten las piezas y repártanselas al azar. Hagan una ampliación a escala: el lado que mide 2 cm debe medir 4 cm en la ampliación.**



- **Armen el rompecabezas. Si las piezas no embonan, busquen, en grupo, el origen del error.**

4. **Analicen la siguiente afirmación.**

Los rombos, como los cuadrados, tienen cuatro lados iguales. Por tanto, cualquier rombo es semejante a otro.

a) Si consideras que la afirmación es falsa, da un ejemplo que la contradiga. Si consideras que es verdadera, explica por qué. ______________________________

____

b) Escribe qué condiciones deben cumplir dos rombos para ser semejantes.

____

Una pista

Dado que los lados correspondientes de figuras semejantes son proporcionales, debe haber un número que, al multiplicarse por las medidas de una de las figuras arroje las medidas de la otra.
A veces, encontrarlo es difícil. Por ejemplo, para encontrar qué número multiplicado por 5 da 8 se puede…
- **si a 5 le corresponde 8, averiguar cuánto le corresponde a 1;**
- **averiguar qué fracción de 5 da 8 o, dicho en otras palabras, qué fracción multiplicada por 5 da 8;**
- **dividir 8 entre 5.**

[1] Tomado de Brousseau, G., "Problèmes de didactique des décimaux" en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, París, La Pensée Sauvage, núm. 2, vol. 3, 1981, pp. 37-127.

5. **Escribe V, de verdadero, o F, de falso, según corresponda. Dibuja en tu cuaderno dos figuras para demostrar que una oración es falsa, o argumenta su veracidad en caso de que sea cierta.**

Oración 1. Si dos figuras son congruentes, también son semejantes. ________

Oración 2. Si dos figuras son semejantes, también son congruentes. ________

Argumentación de la veracidad de una oración.

____

____

____

____

6. **Anota si cada afirmación es verdadera o falsa; no olvides argumentar tus respuestas. En el caso de las falsas, traza en tu cuaderno un par de figuras que lo demuestren.**

a) Todos los rectángulos son semejantes.

____

b) Todos los rectángulos cuyo ancho mide la cuarta parte del largo son semejantes.

____

c) Todos los cuadrados son semejantes.

____

d) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

____

e) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

____

f) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

____

- **Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 4, 5 y 6 con las de tus compañeros. Resuman, entre todos, las características que deben tener dos figuras para ser semejantes.**

Convivimos

Fíjate en que algunas palabras, como *congruente* o *semejante*, cobran diferente sentido en matemáticas. Organiza con tu grupo una lluvia de ideas para identificar otras palabras cuyo significado en el lenguaje cotidiano difiera del matemático.

conect@mos

Aprende más sobre figuras semejantes en

www.redir.mx/SCM3A-031

Trabaja con un compañero. Lean la información presentada y resuelvan los ejercicios propuestos. Al finalizar, comparen y validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

BLOQUE 1

Secuencia 3 / lección 8

Figuras congruentes

CONTENIDO
Explicito los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

¿Cuál es la información mínima que debe proporcionarse a una persona acerca de un triángulo para que trace otro congruente? ¿Qué información hay que dar si solamente se quiere que sean semejantes? Estudiarás estas cuestiones durante la secuencia.

1. **Reúnete con dos o tres compañeros para jugar reproduce el triángulo. Las reglas son iguales que las del juego reproduce la figura, expuesto en la lección 5 de la secuencia anterior; la única diferencia es que ahora su profesor tendrá un triángulo irregular ABC.**

- **Analicen, con el grupo, las preguntas que formularon durante el juego.**

   a) ¿En qué fallaron las preguntas de quienes no lograron trazar un triángulo congruente? ¿Qué información les faltó?

   b) De las preguntas que sí funcionaron, ¿algunas solicitaban menos información que otras? Si es así, escriban en su cuaderno dos de las preguntas más breves que sí funcionaron.

2. **Repitan la actividad anterior de la siguiente manera.**

   » Organícense en parejas.
   » Cada pareja tendrá una pareja asociada, es decir, ambas parejas formarán parte del mismo equipo. Las parejas asociadas deberán sentarse lo más lejos posible entre sí.
   » El profesor entregará a cada pareja un triángulo trazado en una hoja de papel.
   » Cada pareja mandará un mensaje escrito, sin dibujos, a su pareja asociada, con la información necesaria para trazar un triángulo congruente con el suyo.
   » Los mensajes deben ser lo más breve posible, es decir, no deben incluir información innecesaria o redundante.
   » Al recibir el mensaje de su pareja asociada, cada pareja trazará el triángulo correspondiente en una hoja de papel.
   » Al terminar, cada equipo superpondrá sus figuras para compararlas. Por cada par de figuras que sean congruentes, el equipo obtendrá un punto. Además, los tres mensajes más breves que hayan funcionado valdrán, cada uno, un punto para el equipo que los escribió.

- **Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.**

   a) Analicen todos los mensajes, asignen los puntos correspondientes y determinen a los equipos ganadores.

   b) Escriban en su cuaderno los tres mensajes más breves que hayan funcionado.

   c) Propongan y acuerden cuál es la información mínima que hay que dar en un mensaje para trazar un triángulo congruente con otro. Discutan más de una posibilidad.

   d) Pongan a prueba sus propuestas; analicen, en cada una, si pueden construir dos triángulos que cumplan las condiciones planteadas, pero que no sean congruentes.

sm

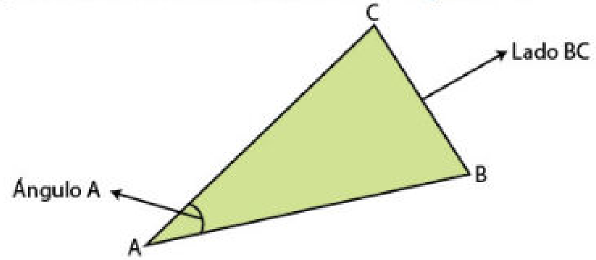
sm

3. **Forma un equipo de tres o cuatro integrantes. Efectúen lo siguiente en su cuaderno.**

   a) A la derecha hay seis conjuntos de dos o tres medidas de triángulos. Analicen cada conjunto de datos y prevean, sin hacer trazos, si con los datos se pueden construir triángulos diferentes o si sólo se pueden trazar congruentes. Si se pueden dibujar diferentes, indíquenlo junto al conjunto. Hagan lo mismo en todos los casos; consideren los lados y ángulos como se muestra a continuación.

Lado AB = 6 cm Ángulo A = 43° Ángulo C = 89°	Lado AB = 5 cm Lado BC = 6 cm Lado AC = 7 cm
Lado AB = 11 cm Lado BC = 10 cm Ángulo A = 60°	Lado AB = 4cm Ángulo A = 65°
Lado AB = 4 cm Lado AC= 6 cm Ángulo A = 48°	Ángulo A = 56° Ángulo B = 75° Ángulo C = 49°

Ya sabemos...
Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.



   b) Elijan un conjunto de datos para que cada integrante construya un triángulo con las medidas indicadas. Procuren que los triángulos sean distintos.

   c) Comparen sus triángulos y verifiquen si acertaron en su previsión: con el conjunto de datos, ¿se obtienen triángulos diferentes o congruentes? Si no acertaron, expliquen por qué.

   d) Elijan otro conjunto de datos y repitan el proceso.

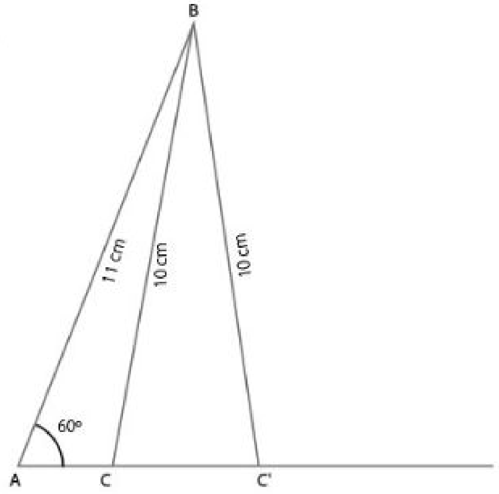
   e) Anoten una ✔ junto a los conjuntos que contengan información suficiente para trazar triángulos congruentes y un ✗ a los que les falten datos.

- **Hagan, con ayuda del profesor, lo que se indica a continuación.**

   a) Vean si todos los equipos pusieron ✗ o ✔ en los mismos grupos. Si hay diferencias, averigüen quién tiene razón.

   b) En la figura de la derecha se han trazado dos triángulos diferentes (ABC y ABC'), con las medidas de uno de los conjuntos de datos anteriores. Identifiquen de qué conjunto se trata y comenten si habían previsto que se podrían trazar triángulos diferentes.

   c) Anoten la información que faltaría en los conjuntos donde pusieron ✗ para que los triángulos trazados fueran congruentes.



Condiciones necesarias y suficientes

CONTENIDO
Explicito los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

1. **En la lección anterior propusieron la información mínima que debe darse para trazar un triángulo congruente con otro. Posiblemente advirtieron que hay varias posibilidades para hacerlo.**

Estos conjuntos mínimos de datos se llaman **criterios de congruencia de triángulos**. Un ejemplo de criterio de congruencia es el siguiente.

- Si dos ángulos de un triángulo y el lado común a ambos son iguales, respectivamente, a dos ángulos y al lado común a ambos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes entre sí.

Convivimos

Reflexiona con tus compañeros acerca del nombre de la lección: ¿qué quiere decir que una condición sea necesaria y suficiente? Noten que se requiere usar este lenguaje para precisar ideas en un diálogo matemático.

a) Observen que el criterio anterior requiere que los triángulos tengan tres elementos iguales: dos ángulos y el lado común a ambos. Por eso se denomina criterio *ALA*.

b) En total hay tres criterios de congruencia, con tres datos cada uno. Identifíquenlos y, si no lo han hecho aún, anótenlos en su cuaderno. Propongan una manera de nombrar cada uno.

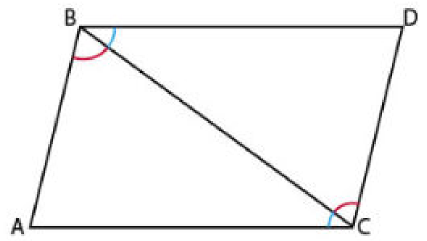
- **Comenten, en grupo y con ayuda del profesor, los criterios que ustedes encontraron. Noten que no hay criterios de congruencia que requieran únicamente dos medidas iguales. Después lean los criterios del siguiente recuadro y comenten si corresponden con los que ustedes anotaron.**

Para asegurar que dos triángulos son congruentes, es suficiente que se cumpla cualquiera de los siguientes criterios de congruencia.

- Que tengan tres lados iguales (criterio *LLL*).
- Que tengan dos lados y el ángulo que estos forman iguales (criterio *LAL*).
- Que tengan dos ángulos y el lado común a ambos iguales (criterio *ALA*).

2. **Trabaja con un compañero. A continuación se describen las características de algunas parejas de triángulos y se pregunta si estos pueden ser diferentes o siempre deben ser congruentes. Si consideran que pueden ser diferentes, tracen un ejemplo en su cuaderno; si piensan que siempre han de ser congruentes, usen algún criterio de congruencia para justificar su afirmación, como se hace en el ejemplo siguiente.**

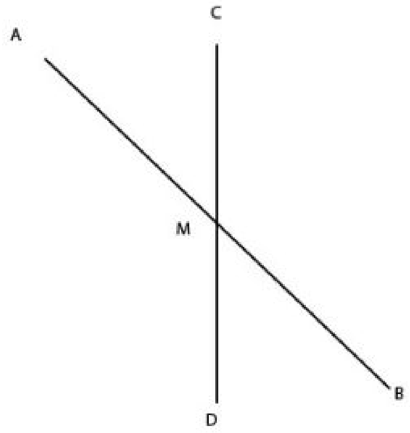
a) ¿Pueden ser diferentes los dos triángulos que se forman al trazar una diagonal en un paralelogramo?
No; como se muestra en la siguiente figura, los triángulos son congruentes. Dado que ABCD es un paralelogramo, $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ y $\overline{AC}$ es paralelo a $\overline{BD}$. Entonces…
» el ángulo ABC es congruente con el ángulo BCD (marcados en rojo) por ser *alternos internos* en un sistema de paralelas cortadas por una secante;
» el ángulo CBD es congruente con el ángulo BCA (marcados en azul) por la misma razón;
» los dos triángulos comparten el lado BC.



b) Si dos triángulos isósceles tienen la misma base, ¿necesariamente son congruentes?

c) ¿Pueden ser diferentes los dos triángulos que se forman al trazar una diagonal en un cuadrilátero cualquiera?

d) Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en el punto medio M de ambos, como se muestra en la figura de la derecha, ¿los triángulos ACM y MDB pueden ser diferentes?



e) Si dos triángulos equiláteros tienen un lado igual, ¿son necesariamente congruentes?

f) Si dos triángulos tienen bases y alturas iguales, ¿pueden ser diferentes?

g) ¿Pueden ser diferentes dos triángulos con tres ángulos iguales?

3. **Trabaja con un compañero que esté sentado lejos de ti. Cada uno necesitará un juego de geometría (regla, transportador y compás), una hoja blanca y media hoja.**

a) Cada uno trace un rombo en la hoja blanca, sin que el otro lo vea.

b) Anoten en la media hoja un mensaje dirigido a su pareja con la información necesaria para que trace un rombo congruente con el suyo. No pueden agregar dibujos.

c) Intercambien los mensajes y tracen los rombos.

d) Comparen sus rombos. Si no coinciden, analicen qué falló.

- **Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.**

a) Vean qué mensajes no funcionaron y analicen por qué.

b) Comenten, respecto a los mensajes que sí funcionaron, en cuáles hay la mínima información necesaria y en cuáles hay información innecesaria o redundante.

c) Tracen las diagonales de su rombo y adviertan que en su interior se forman cuatro triángulos. Expliquen por qué basta proporcionar los datos de uno solo de los triángulos para trazar un rombo congruente.

conect@mos

Descarga la actividad de triángulos en www.redir.mx/SCM3A-035
Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas.

Una pista

Usa los criterios de congruencia para demostrar que los cuatro triángulos que se forman al interior del rombo son congruentes.

BLOQUE 1

Secuencia 3 / lección 10

¿Son semejantes?

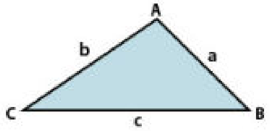
CONTENIDO: Explicito los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Ya sabemos...

Dos figuras semejantes tienen la misma forma, pero el tamaño puede ser igual o diferente.

Si dos triángulos son semejantes, los ángulos de uno son congruentes con los del otro y los lados de ambos, proporcionales entre sí.

1. Trabaja con un compañero. En la tabla están todas las medidas del triángulo 1 y algunas medidas de otros triángulos. Considerando esos datos, tracen un triángulo que no sea semejante al 1. Anoten, en la última columna, Sí o No para indicar si fue posible trazar un triángulo no semejante. Cuando sea posible hacerlo, anoten las medidas que faltan en la tabla.



Triángulo	Lado (cm)			Ángulo (grados)			¿Fue posible construir un triángulo no semejante al triángulo 1?
	a	b	c	∠A	∠B	∠C	
1	4	5	7	101	45	34	
2				101			
3				101	45		
4	8	10					
5	8	10	14				
6	8			101			
7	8	10		101			
8	8	10				34	

- **Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo que se pide a continuación.**
   a) Verifiquen si están de acuerdo en qué casos no es posible trazar triángulos NO semejantes. Si hay desacuerdos, analicen quién tiene razón.

   b) Comenten qué datos se necesitan, como mínimo, para asegurar que un triángulo sea semejante a otro dado. Noten que hay varias respuestas posibles; cada una constituye un criterio de semejanza de triángulos.

   c) Prueben los criterios de semejanza que hayan encontrado; para cada uno, intenten hacer triángulos que cumplan el criterio, pero que NO sean semejantes.

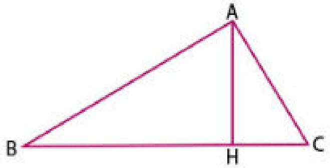
   d) Finalmente, comparen sus criterios de semejanza con los del siguiente recuadro. Si alguno es nuevo (no lo encontraron ustedes), pónganlo a prueba como lo hicieron en el inciso c). Ahora bien, si encontraron alguno que no está en el recuadro, significa que este contiene información que se puede quitar, es decir, no es un criterio mínimo, o tiene algún error. Si éste es el caso, busquen el error y corríjanlo.

Para que dos triángulos sean semejantes basta que se cumpla cualquiera de los siguientes criterios.
- Que los tres lados de uno sean proporcionales a los tres del otro.
- Que dos ángulos de uno sean iguales a dos ángulos del otro.
- Que dos lados de uno sean proporcionales a dos lados del otro, y el ángulo comprendido entre estos lados sea igual.

Estas tres condiciones se llaman **criterios de semejanza de triángulos**.

2. Argumenta en tu cuaderno por qué las siguientes parejas de triángulos son semejantes. Aprovecha la información que se da, la que no se proporciona, pero se puede deducir, y algún criterio de semejanza. En el inciso a) hay un ejemplo.

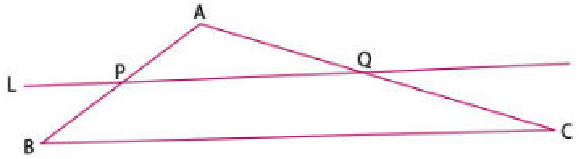
   a) AH es la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo rectángulo ABC.



   » El triángulo ABH es semejante al triángulo ABC porque…
   – los dos triángulos comparten el ángulo ABH;
   – ambos tienen un ángulo recto;
   – los triángulos tienen dos ángulos iguales, por lo que se cumple el criterio que afirma que si dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos del otro, los triángulos son semejantes.

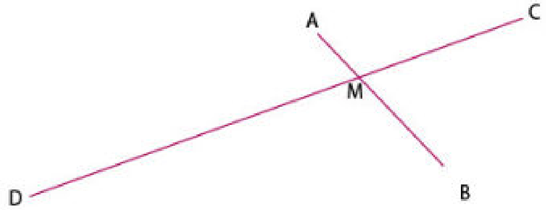
   » El triángulo AHC es semejante al triángulo ABC porque…
   » El triángulo ABH es semejante al triángulo AHC porque…

   b) La recta L es paralela al lado BC del triángulo ABC, y corta los lados AB y AC en los puntos P y Q, respectivamente.



   » El triángulo APQ es semejante al triángulo ABC porque…

   c) Los segmentos AB y CD se cortan en el punto M. Los segmentos MB y MD miden el doble que AM y CM, respectivamente.



   » Los triángulos ACM y BDM son semejantes porque…

- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las de tus compañeros. Revisen en cada caso qué criterio de semejanza aplicaron y si la información que usaron se desprende de los datos del problema. Hagan en su cuaderno una síntesis acerca de los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos; ilustren cada caso con una pareja de triángulos trazados con regla y compás.

Una pista

Recuerda cómo son los ángulos que se forman en un sistema de paralelas cortadas por una secante.

conect@mos

Refuerza tus conocimientos sobre semejanza de triángulos en

www.redir.mx/SCM3A-037

Resuelve las actividades. Después, compara y valida tus respuestas con algún compañero. Al terminar, comenten las dificultades que hallaron durante el proceso.

Secuencia 4 / lección 11

Tablas de valores y gráficas

CONTENIDO Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Las gráficas, tablas y expresiones algebraicas sirven para estudiar las relaciones entre dos conjuntos de cantidades. En esta secuencia aprenderás a analizar relaciones entre dos conjuntos de cantidades a partir de algunas características de su gráfica.

Ya sabemos...

Dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales si al aumentar una de ellas al doble, triple..., su correspondiente cantidad aumenta el doble, triple... Lo mismo sucede si una cantidad disminuye a la mitad, a una tercera parte, etcétera.

1. **Analiza la información y anota qué tabla de valores corresponde a cada situación.**

» El peso de un perro desde su nacimiento hasta que cumple tres meses: ____________

» La cantidad de paletas de caramelo y su costo: ____________

» Las edades de dos hermanos si uno es dos años mayor que el otro: ____________

Tabla 1	
x	y
0	1
1	3
2	5
3	7

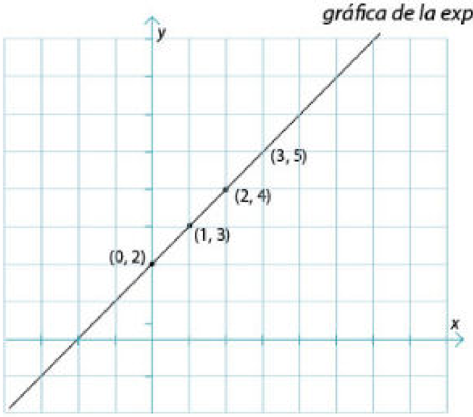
Tabla 2	
x	y
0	0
1	3
2	6
3	9

Tabla 3	
$y = x + 2$	
x	y
0	2
1	3
2	4
3	5

a) Escribe en las tablas 1 y 2 las expresiones algebraicas correspondientes.

b) ¿En qué tabla las cantidades (x, y) cambian de manera proporcional? ____________

2. **En el plano cartesiano se representaron los pares de coordenadas en la tabla 3 y se unieron mediante una línea. El trazo que se obtuvo como resultado es llamado *gráfica de la expresión algebraica* $y = x + 2$.**



a) Haz lo mismo con los pares de coordenadas de las tablas 1 y 2. Traza las rectas con colores diferentes.

b) Una de las tres rectas trazadas pasa por el origen. ¿A qué tabla corresponde dicha recta? ____________

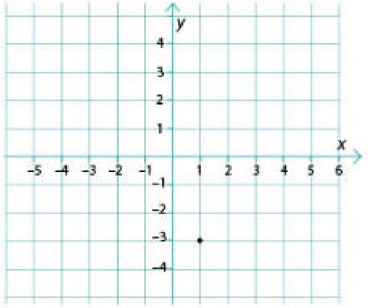
c) Explica en tu cuaderno las características que, según tú, debe tener la gráfica de una relación de proporcionalidad directa.

3. **Haz lo siguiente usando la expresión algebraica $y = 2x - 5$.**

a) Completa la tabla 4. Dale diversos valores a x y efectúa las operaciones correspondientes para obtener los de y. Por ejemplo, si x vale 1, $y = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$.

b) Representa en el plano cartesiano algunos pares de coordenadas y traza la gráfica de la expresión algebraica.

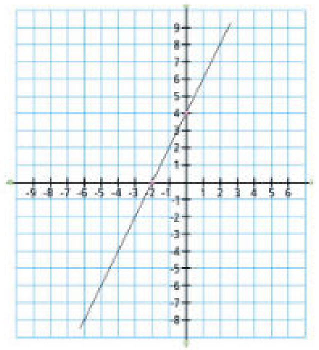
Tabla 4	
$y = 2x - 5$	
x	y
1	-3
2	
3	
4	



» La relación anterior no es de proporcionalidad directa. Da al menos un ejemplo de ello.

____

4. **Elabora, con base en la gráfica, la tabla de valores y encuentra la expresión algebraica.**



x	y

a) Subraya la expresión algebraica que corresponde a la gráfica.

$y = -2x + 4$ $\quad$ $y = 2x - 4$ $\quad$ $y = 2x + 4$ $\quad$ $y = -2x - 4$

b) ¿Por qué la gráfica no corresponde a una relación de proporcionalidad directa?

____

5. **Reúnete con dos compañeros y hagan lo siguiente en su cuaderno.**

a) Elaboren tablas de valores con las siguientes expresiones algebraicas y grafíquenlas.

$y = \frac{x}{2}$ $\quad$ $y = \frac{x}{2} + 1$ $\quad$ $y = \frac{x}{2} - 1$ $\quad$ $y = 3x$ $\quad$ $y = 3x + 4$ $\quad$ $y = 3x - 2$

b) ¿Cuál es la ordenada al origen de cada recta?

c) ¿Qué expresiones algebraicas dan como resultado una gráfica asociada a una relación de proporcionalidad directa?

d) En las expresiones algebraicas que corresponden a relaciones de proporcionalidad directa, ¿cuál es el valor de la ordenada al origen?

Una pista

La ordenada al origen tiene dos interpretaciones.
Geométrica. Es la ordenada del punto donde la grafica de la recta interseca el eje y.
Algebraica. Es el valor de y cuando x vale 0.

* **Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Comenten la relación entre la ordenada al origen y la expresión algebraica.**

Tarifas telefónicas

CONTENIDO
Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad

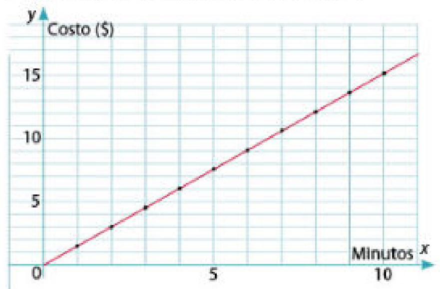
En contexto

Una consulta hecha en 2004 indicó que en México había poco más de 34 millones de teléfonos celulares. Es decir, prácticamente uno de cada tres mexicanos contaba en ese año con un sistema de comunicación de este tipo. El porcentaje fue mucho mayor en los hombres (43%) que en las mujeres (29%), y decrecía en los adultos mayores y en las áreas rurales del país, donde sólo 18% declaró contar con este servicio.

1. **Trabaja en equipo. Las siguientes gráficas muestran las tarifas de una compañía que ofrece diferentes servicios. Respondan las preguntas con ayuda de esa información.**

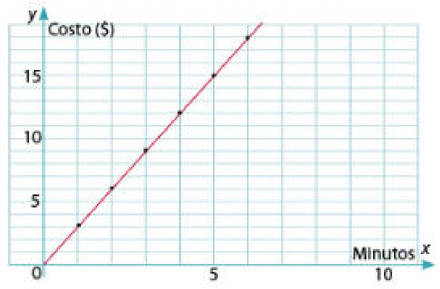
Gráfica 1

Costo por minuto de una llamada de un celular a otro



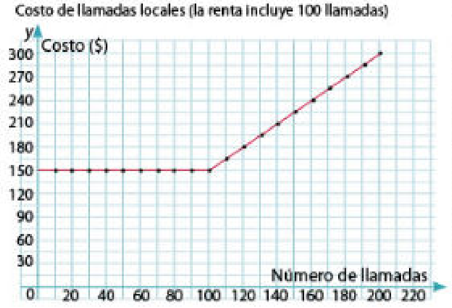
Gráfica 2

Costo por minuto de una llamada de casa a celular



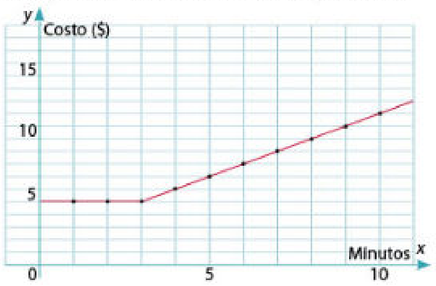
Gráfica 3

Costo de llamadas locales (la renta incluye 100 llamadas)



Gráfica 4

Costo por minuto de una llamada de teléfono público a casa



a) ¿En qué gráfica se muestra una tarifa en que el costo por llamada no depende de los minutos que ésta dure? ________________

b) De las gráficas en que el costo depende de la duración de la llamada, ¿en cuál cuesta lo mismo una llamada de 1 min que una de 3 min? ________________

c) Explica por qué las cantidades (costo y llamadas) de la gráfica 3 no son directamente proporcionales. ____

____

d) ¿En qué gráfica se indica que se debe pagar aunque no se hagan llamadas? ________

* **Comparen sus respuestas y determinen en qué gráfica se paga menos por una llamada de 10 minutos.**

2. **Completa las tablas con los datos proporcionados en las gráficas anteriores.**

Celular a celular		Teléfono de casa a celular		Llamadas locales		Teléfono público a casa	
Minutos	Costo	Minutos	Costo	Llamadas	Costo	Minutos	Costo
1			3	10		1	
2		5	15	20		2	
	6	8			150	4	
10		10		110		8	

3. **Contesta las preguntas en tu cuaderno y haz lo que se pide.**

a) En la tarifa de llamadas de teléfono público a casa, la cantidad que se paga por usar el teléfono no es proporcional al número de llamadas. Da un argumento para afirmarlo.

b) ¿En cuáles de las relaciones anteriores el costo de la llamada es proporcional a su duración? ¿Cómo lo sabes?

c) Considera las dos relaciones de proporcionalidad. Representa con x el número de minutos y con y, el costo. Anota en la parte inferior de cada tabla su expresión algebraica.

Reflexionamos

En las tablas con cantidades directamente proporcionales, hay un número por el que se multiplican las cantidades de una columna para obtener su correspondiente en la otra.

* **Haz, en grupo y con ayuda del profesor, lo que se pide.**

a) La representación de la gráfica 3 está formada por dos partes, una recta horizontal y una inclinada (trazadas con color rojo).

» En la recta horizontal, para los valores de x que van de 0 a 100, el valor que corresponde a y siempre es 150, es decir, el valor de y no cambia aunque el de x sí lo haga. Entonces, para valores de x menores o iguales a 100, la expresión algebraica es $y =$ ________

» Subrayen la expresión algebraica que corresponde a los valores de x mayores que 100.

$y = \frac{2x}{3}$ $y = 3x$ $y = \frac{3x}{2}$ $y = 2x$

b) Anoten las expresiones algebraicas correspondientes a la relación entre la duración de una llamada de teléfono público a casa y su costo (gráfica 4).

Para valores de x menores o iguales a 3 min, $y =$ ______

Para valores de x mayores a 3 min, $y =$ ____________

c) Verifiquen, a partir de la gráfica, que las expresiones algebraicas que anotaron sean correctas; en caso contrario, corrijan lo necesario.

Las gráficas que corresponden a relaciones de proporcionalidad directa son puntos de una recta que pasa por el origen.

Tiempo, distancia, velocidad

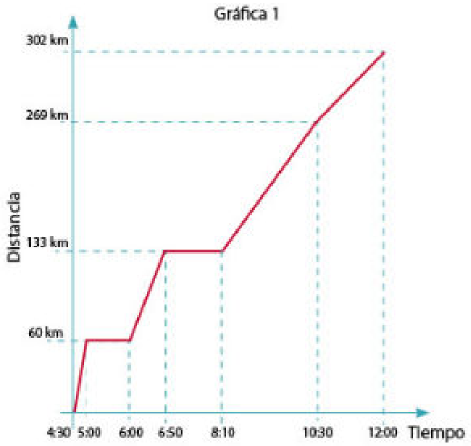
CONTENIDO

Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad

1. La gráfica 1 corresponde al recorrido de un tráiler, del Distrito Federal a la ciudad de Morelia. Lee la bitácora de viaje (informe que el chofer presenta a la empresa acerca del recorrido) e interpreta la gráfica para contestar las preguntas.

Bitácora de viaje

- » Salí del Distrito Federal el viernes 25 de marzo a las 4:30 de la mañana.
- » Me detuve sólo dos veces: la primera en Toluca, para cargar diésel y poner la lona; la segunda en la caseta de cobro, poco antes de Atlacomulco, para almorzar.
- » De Zinapécuaro a Morelia, el camino estaba en reparación.



a) ¿De cuántos kilómetros fue el recorrido del tráiler? ________

b) ¿Cuánto tiempo duró? ________

c) ¿En qué momento el tráiler avanzó más rápido? ________

d) ¿En cuál avanzó más despacio? ________

e) ¿A qué velocidad promedio recorrió el primer tramo de 60 km? ________

f) ¿Cuánto tiempo se detuvo el chofer la primera vez? ________

g) ¿Y la segunda? ________

h) ¿La distancia que recorrió el tráiler y el tiempo transcurrido cambian de manera proporcional? ______ Justifica tu respuesta. ________

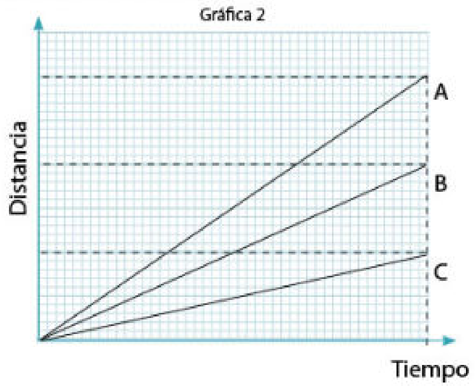
i) Completa la tabla indicando en qué lugar estaba el tráiler y qué hacía el chofer en las horas indicadas.

Hora	Lugar en el que se encontraba el tráiler	Actividad que llevaba a cabo el chofer
5:30		
8:00		
11:00		

- Compara tus resultados con los del resto del grupo. Luego comenten lo siguiente: ¿cómo se averigua, a partir de la gráfica, en qué parte el tráiler avanzo más rápido, y en cuál, más despacio?

2. La tabla y las rectas de la gráfica 2 corresponden al movimiento de tres ciclistas, A, B y C, que salieron al mismo tiempo del mismo lugar. Haz lo que se pide a continuación y responde las preguntas.

Ciclistas			
Minutos (x)	Km (y)	Km (y)	Km (y)
0	0	0	0
20	4	8	12
40	8	16	24
60	12	24	36
x	$y =$	$y =$	$y =$
	Ciclista	Ciclista	Ciclista



a) Escribe en la parte inferior de cada columna la expresión algebraica correspondiente y a qué ciclista pertenece el recorrido.

b) ¿Que ciclista avanzó más rápido? ________

c) ¿Qué relación hay entre la velocidad de cada ciclista y la inclinación de su gráfica? ________

d) Explica por qué la relación entre distancia recorrida y tiempo transcurrido de cada ciclista es una relación de proporcionalidad. ________

conect@mos

Conoce más acerca de las gráficas de relaciones proporcionales en www.redir.mx/SCM3A-043

Observa los ejemplos y resuelve los ejercicios propuestos. Al terminar, comenta con tus compañeros las dificultades que afrontaste.

3. María y Sonia corrieron durante 30 s para ver quién llegaba más lejos. Como María es más pequeña, Sonia la dejó iniciar 30 m adelante. Las rectas azul y verde de la gráfica 3 muestran la relación entre el tiempo y la distancia que recorrieron. Responde las preguntas en tu cuaderno y haz lo que se pide.

a) ¿Quién ganó la carrera y qué distancia recorrió?
b) ¿Qué distancia recorrió la perdedora?
c) Si la carrera hubiera durado 15 s, ¿quién hubiera ganado?
d) Escribe las expresiones algebraicas que relacionen el tiempo transcurrido con la distancia recorrida de cada niña.

4. Reúnete con tres compañeros. Comparen y comenten sus respuestas. Adviertan que, en algún momento, Sonia alcanza y rebasa a María. Averigüen a los cuántos segundos ocurre esto.

Sonia alcanza a María a los ________

BLOQUE 1

Secuencia 5 / lección 14

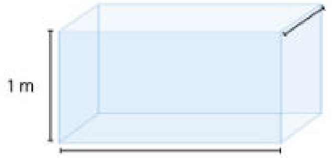
Un nuevo tipo de variación

CONTENIDO

Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

¿Cómo cambia el área de un rectángulo de perímetro fijo si se varía el ancho? Hasta ahora has estudiado principalmente expresiones algebraicas del tipo $y = mx + b$. Ahora estudiarás otro tipo de expresiones.

1. Se desea construir una pecera de 1 m de altura; además, el largo será el doble de lo que mida el ancho. Haz lo que se pide y contesta las preguntas.



a) Escribe cuatro medidas posibles para el largo y el ancho de la pecera.

Largo: ______ Largo: ______ Largo: ______ Largo: ______

Ancho: ______ Ancho: ______ Ancho: ______ Ancho: ______

b) Completa la tabla de medidas posibles para la pecera.

Medida del ancho (x)	Volumen de la pecera (y)
2.3 m	
1.7 m	
3.9 m	
	2.88 m^3

Ya sabemos...

El volumen de un prisma rectangular se calcula multiplicando largo por ancho por altura.

c) Plantea la expresión algebraica que relaciona el ancho con el volumen de la pecera. Si representas el ancho con x y el volumen con y, la expresión es $y =$ ______________.

d) Si el ancho mide una cantidad entera de centímetros, ¿la pecera puede tener un volumen exacto de 3 m^3? ____ ¿Por qué? ______________________

2. En otra pecera de 1.5 m de ancho, la altura es la tercera parte del largo. Escribe en tu cuaderno la expresión algebraica que relaciona el largo (x) con el volumen (y).

3. Para otra pecera, la expresión algebraica que relaciona la altura (x) con el volumen (y) es $y = (2)(3x)(x)$, o bien $y = 6x^2$. ¿Cómo se relacionan las medidas de esta pecera?

____

- Comenta tus respuestas con el grupo. En específico, mencionen si encontraron dos respuestas posibles para la pregunta anterior.

4. Juan debe trazar un rectángulo con perímetro de 50 cm. ¿Cuáles pueden ser sus medidas?

a) Encuentra tres soluciones distintas: __________, __________ y __________

b) Si las medidas del rectángulo son números enteros (en centímetros), ¿cuántas soluciones distintas hay? ______________________

conect@mos

Revisa más casos para aplicar las ecuaciones cuadráticas en www.redir.mx/SCM3A-045

Trabaja con un compañero para que resuelvan los ejercicios. Al terminar, compartan sus resultados y procedimientos con el grupo.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En relación con el inciso a), verifiquen que en cada caso el perímetro sea 50 cm; para el inciso b), asegúrense de anotar exactamente cuántas soluciones hay, aunque no las expliquen todas.

5. En la actividad anterior, si un lado del rectángulo mide 8 cm, ¿cuánto debe medir el otro para que el perímetro sea de 50 cm? _____ ¿Y si mide 13 cm? _____ ¿Y con 24 cm? _____

a) Si un lado del rectángulo mide x, ¿cuanto mide el otro lado (en términos de x)? _____

Explica tu razonamiento. ______________________

____

____

b) Escribe, con base en tu razonamiento anterior, una ecuación que relacione el área del rectángulo con la medida de ambos lados; si representas el área del rectángulo con la letra A y la longitud de un lado, con x, la ecuación es $A =$ ______________

c) Utiliza tu ecuación para calcular el área del rectángulo si el ancho es 11 cm: _________

d) Considera los tres rectángulos que propusiste en el inciso a) de la actividad 4. Sustituye en la ecuación anterior la letra x por la medida de un lado de cada uno de esos rectángulos. Comprobarás que éstos tienen distintas áreas, aunque sus perímetros coincidan.

Ya sabemos...

Dos expresiones algebraicas son equivalentes si al simplificarlas se obtiene la misma expresión.

- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, averigüen si todos plantearon ecuaciones iguales o equivalentes; si algunas no lo son, determinen cuáles son incorrectas y corrijan lo necesario.

6. Juan trazará más rectángulos con perímetro fijo, pero ahora debe ser distinto de 50 cm. La ecuación que relaciona el área de cada rectángulo (A) con la medida de uno de sus lados (x) es $A = x(18 - x)$, o bien, $A = 18x - x^2$.

¿Cuánto mide esta vez el perímetro fijo? __________

- Lee y comenta la siguiente información con tus compañeros.

Una ecuación en la que el exponente más grande de la variable es 2 se llama **cuadrática** o de **segundo grado**. Por ejemplo, la ecuación $A = 25x - x^2$, es de segundo grado, pues la variable x aparece elevada al cuadrado.

Planes de ahorro I

CONTENIDO: Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

En todos los problemas de esta lección y las dos siguientes puedes usar calculadora.

1. Los alumnos de primer grado planean hacer un viaje al terminar la secundaria. Necesitarán $4 000.00 y quieren empezar a ahorrar a partir de mayo de su primer año, y terminar, a más tardar, en junio del tercero. Como Leonardo quiere ir al viaje, su papá le ha ofrecido tres posibilidades para ayudarlo a ahorrar.
   » Darle $130.00 cada mes
   » Darle en un inicio $1 200.00 y después $15.00 cada semana
   » Darle lo que pueda cada semana, desde $0.00 hasta $100.00

   a) ¿Qué plan le conviene a Leonardo? ______

   b) Modifica el plan que elegiste para garantizar un ahorro de $4 000.00. Considera la posibilidad de fijar una cuota inicial, el número de cuotas y su distribución temporal (semanal, mensual, etcétera), además del dinero que se entregará en cada cuota.

   ______

   ______

2. Ten en cuenta que el segundo plan se puede mejorar al guardar los $1 200.00, pero en lugar de $15.00 por semana, juntar $120.00 al mes. Comprueba que, de esta manera, en abril del tercer año Leonardo habrá reunido los $4 000.00.

A los planes de ahorro en los que se guarda una cantidad fija cada cierto tiempo (cada semana, cada mes, cada trimestre…) se les llama **planes de cuota fija**. En estos planes puede haber una cuota inicial.

3. Para ahorrar $3 400.00, Leticia dará una cuota inicial de $600.00 y una fija de $200.00.

   a) ¿Cuántos plazos se deben cumplir para lograr su propósito? ______

   b) ¿Y si la cuota inicial fuera de $400.00? ______

4. Tania y Gilberto ahorrarán, cada uno, $4 000.00 en 12 plazos. La cuota inicial de Tania es de $2 200.00 y la de Gilberto, de $160.00. ¿Qué cuota fija necesita dar cada uno? ______

   ______

5. Alma y Cynthia también irán al viaje. Cynthia recibe una cantidad más o menos estable de dinero cada mes, por lo que ha decidido ahorrar con un plan de cuota fija. En cambio, Alma considera que no le conviene un plan de este tipo; ella prefiere uno en el que cada mes aporte más dinero que en el anterior.

   a) Propón un plan de ahorro adecuado para Alma.

   ______

   ______

   ______

   ______

* Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Después lean lo siguiente y contrasten los datos con sus respuestas de la actividad 5. En particular, comenten si alguno de ustedes propuso algún plan de ahorro similar al del recuadro.

Otro tipo de plan de ahorro es el de **cuota creciente**. En éste, la cuota aumenta al sumar en cada ocasión la misma cantidad que se aportó la vez anterior y la que se ahorró durante el primer plazo. Por ejemplo, al inicio Alma da $15.00; en el primer plazo, $20.00; en el segundo, $20.00 + $20.00; en el tercero, $20.00 + $20.00 + $20.00; y así sucesivamente.

6. Si Alma escoge el plan de ahorro de cuota creciente que se describe arriba, ¿cuánto tendrá ahorrado después de siete meses? ______

   a) Llena la tabla para verificar tu respuesta y calcular lo que Alma tendrá ahorrado después de 10 meses.

Mes	Cuota ($)	Ahorro acumulado
1	15 + 20	35
2	20(2) = 40	35 + 40 = 75
3	20(3) = 60	
4		135 + 80 = 215
5		
6		315 + 120 = 435
7		
8	20(8) = 160	
9		
10		

   b) Modifica el plan de ahorro de Alma, de manera que siga siendo de cuota creciente, pero que permita tener al menos $4 000.00 en 10 meses. Calcula la cuota inicial y la del primer plazo.

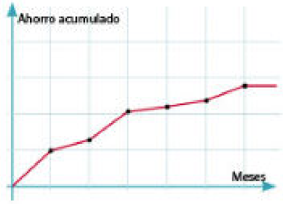
   ______

* Compara tu plan con los de tus compañeros. Si varios propusieron el mismo, formulen otro con la participación de todo el grupo.

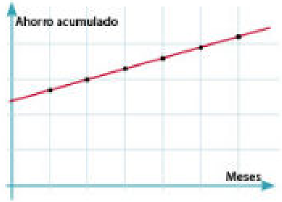
Planes de ahorro II

CONTENIDO: Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

1. **Analiza los siguientes planes de ahorro y sus representaciones gráficas.**
   - Miranda dio una cuota inicial de $1 200.00 y ha estado ahorrando $150.00 cada mes.
   - Isabel sólo ahorra lo que le sobra de su mesada.
   - Arturo dio una cuota inicial de $600.00 y ahorra $300.00 cada mes.
   - Cynthia inició con una cuota de $150.00; el primer mes dio $200.00; el segundo, $400.00; el tercero, $600.00; y así sucesivamente. Cada mes ahorra $200 .00 más que el anterior.

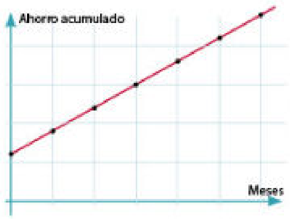


____



____

____



____

a) Escribe sobre las líneas azules a quién corresponde cada gráfica.

- **Verifica, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten lo siguiente: dos de las gráficas no son líneas rectas, pero son muy diferentes entre sí. ¿Qué las distingue? ¿Cuál es la más irregular de ambas y a quién corresponde ese ahorro?**

2. **Haz lo que se pide para obtener la expresión algebraica de un plan de cuota creciente.**

a) Considera un plan sencillo sin cuota inicial y con un primer plazo de $2.00.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	2	6	12	20	30		

Con cualquiera de las siguientes expresiones algebraicas es posible calcular el ahorro acumulado (*A*) en el plazo *n*.
- $A = n(n + 1)$
- $A = n^2 + n$

b) Completa la tabla del inciso anterior usando cualquiera de las dos expresiones anteriores. Después calcula el ahorro acumulado en el plazo 20. ______________

La expresión usada servirá como base para determinar la expresión algebraica de cualquier plan de cuota creciente.

Reflexionamos

A partir de las gráficas de la actividad anterior, explica por qué la expresión algebraica de un plan de cuota creciente no puede ser de la forma $y = mx + b$.

c) Considera un plan en que no haya cuota inicial y la del primer plazo sea de $10.00; completa la tabla y calcula el ahorro acumulado en los plazos 20 y *n*.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	10	30	60	100	150		

Ahorro acumulado en el plazo 20 = ______________

Ahorro acumulado en el plazo *n* = ______________

Una pista

La cuota del primer plazo ($10.00) es cinco veces la del inciso anterior. Verifica que ocurra lo mismo con el ahorro acumulado en cada plazo de ambos planes.

d) Considera un plan sin cuota inicial y cuya cuota en el primer plazo sea de $34.00. Completa la tabla y calcula el ahorro acumulado en los plazos 20 y *n*.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	34	102	204	340	510		

Ahorro acumulado en el plazo 20 = ______________

Ahorro acumulado en el plazo *n* = ______________

- Subraya las expresiones que sirvan para determinar el ahorro acumulado en el plazo *n*.

$17n(n + 1)$ $\quad$ $34n + 1$ $\quad$ $17n^2 + 17n$ $\quad$ $17n^2 + 1$

Reflexionamos

¿Cuál es la fórmula de un plan de ahorro en el que no hay cuota inicial y la cuota del primer plazo es 2×13.4?

En un plan de cuota creciente, sin cuota inicial y donde *C* representa la cuota del primer plazo, la expresión para calcular el ahorro acumulado en el plazo *n* es la siguiente.

Ahorro acumulado en el plazo *n*: $\frac{C}{2}(n)(n + 1)$, o bien $\frac{C}{2}n^2 + \frac{C}{2}n$

e) Considera un plan cuya cuota inicial sea de $150.00 y la del primer plazo, de $34.00; completa la tabla y calcula el ahorro acumulado en los plazos 20 y *n*.

Plazo	1	2	3	4	5	6	7
Ahorro acumulado ($)	184	252	354	490	660		

Ahorro acumulado en el plazo 20 = ______________

Ahorro acumulado en el plazo *n* = ______________

- **Lee, en grupo, la siguiente información. Contrástenla con sus respuestas de la actividad 2.**

En cualquier plan de cuota creciente con cuota inicial C_0 y cuota de primer plazo *C*, la expresión para calcular el ahorro acumulado en el plazo *n* es la siguiente.

Ahorro acumulado en el plazo *n*: $\frac{C}{2}(n)(n + 1) + C_0$, o bien $\frac{C}{2}n^2 + \frac{C}{2}n + C_0$

Las expresiones que corresponden a planes de cuota creciente son **cuadráticas**, porque el exponente más grande al que se eleva *n* es 2, es decir, ***n* está elevada al cuadrado**.

Secuencia 5 / lección 17

Planes de ahorro III

CONTENIDO: Represento en forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Reflexionamos

Sin la expresión algebraica, ¿cuántas operaciones se requerirían para determinar el ahorro acumulado en los 37 plazos?

1. **Resuelve los problemas. Utiliza la información del recuadro final de la lección anterior.**

   Plan de cuota creciente. Ahorro acumulado en el plazo n: $\frac{C}{2}(n)(n+1) + C_0$, o bien $\frac{C}{2}n^2 + \frac{C}{2}n + C_0$

   a) Considera un plan de cuota creciente cuya cuota inicial sea de \$120.00 y de \$70.00 en el primer plazo. Plantea la expresión algebraica correspondiente y verifica que el ahorro acumulado en 37 plazos sea de \$49 330.00. ______

   b) Considera los planes de Alma (el original y el que elaboraste), incluidos en la actividad 6 de la lección "Planes de ahorro I". Utiliza las expresiones algebraicas correspondientes para verificar tus respuestas anteriores.

- **Verifica las respuestas, en grupo y con ayuda del profesor. Después lean lo siguiente.**

Cuando se usan sólo tablas, los cálculos necesarios para determinar la cantidad reunida en determinado tiempo se vuelven largos y complicados. Las expresiones algebraicas a veces funcionan como fórmulas que los facilitan mucho. También son útiles para comparar el crecimiento del ahorro acumulado en distintos planes.

2. **Haz lo siguiente para obtener la fórmula de cualquier plan de cuota fija.**

   a) Determina la expresión algebraica del ahorro acumulado en el plazo n, para el caso en que no hay cuota inicial y se aportan \$25.00 de cuota fija.

   Ahorro acumulado en el plazo n:

   b) Haz lo mismo para el caso con \$100.00 de cuota inicial y \$25.00 de cuota fija.

   Ahorro acumulado en el plazo n:

   c) Explica por qué, en un plan de cuota inicial C_0 y cuota fija C, el ahorro acumulado en el plazo n es $Cn + C_0$. ______

   ______

Reflexionamos

Justifica por qué las expresiones algebraicas que corresponden a planes de cuota fija siempre son de la forma $y = mx + b$.

3. **Elabora en tu cuaderno dos planes: uno de cuota fija y otro de cuota creciente, en los cuales se garantice un ahorro de \$5 000.00 al cabo de 10 plazos (el ahorro no debe exceder los \$5 300.00).**

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen que todos los planes propuestos permitan obtener el ahorro que se pide. Después analicen si, en general, la cuota del primer plazo en los planes de cuota fija fue más alta que la de los planes de cuota creciente, o al revés. Anoten en su cuaderno sus conclusiones.**

4. **A continuación se proporcionan las expresiones algebraicas de dos planes de ahorro, uno de cuota fija y uno de cuota creciente. Haz lo que se pide.**

   Plan A: ahorro acumulado en el plazo $n = 20n^2 + 20n + 18$

   Plan B: ahorro acumulado en el plazo $n = 500n + 1\,000$

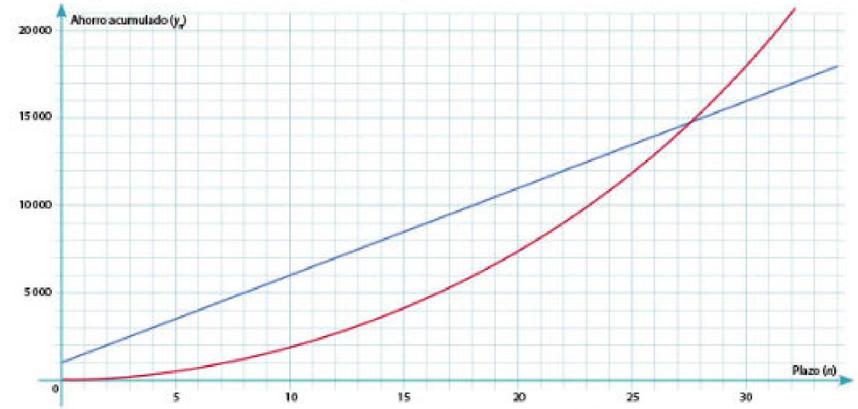
   a) Anota, sin hacer cálculos y para cada frase, una F si consideras que la oración es falsa, o una V si piensas que es verdadera.

   » El plan B siempre permite ahorrar más, pues 500 y 1 000 son considerablemente mayores que 20 y 18.

   » El plan B permitirá ahorrar más al inicio, pero después de cierto tiempo se ahorrará más con el A.

   » Las cuotas del plan A crecen, mientras que las del B son fijas. Por ello, desde el inicio se ahorra más con el primero.

   b) La siguiente gráfica representa la relación entre el número de plazos y el ahorro acumulado para los planes del inciso anterior. La recta azul corresponde al plan de cuota fija y la roja, al de cuota creciente. Utilízalas para verificar tus respuestas del inciso anterior.



   c) Entre el plazo 5 y el 8, ¿cuánto aumenta el ahorro en cada plan? ______

   ______

   d) Entre el plazo 25 y el 28, ¿cuánto aumenta el ahorro en cada plan? ______

   ______

- **Lee, en grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información y contrástenla con sus respuestas de la actividad anterior.**

Al comparar los resultados se advierte que, conforme aumentan los plazos, el ahorro acumulado también lo hace. No obstante, la altura de la gráfica del plan de cuota fija aumenta de manera constante (la cuota en cada plazo siempre es la misma), mientras que la altura de la gráfica del plan de cuota creciente aumenta cada vez más (la cuota de cada plazo siempre es mayor que la del anterior). Ésta es una diferencia visible entre las funciones cuadráticas y las funciones lineales.

conect@mos

Descarga la actividad de relaciones cuadráticas en www.redir.mx/SCM3A-051

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y contesten las preguntas. Al finalizar comenten, en grupo y con ayuda del profesor, cómo encontraron la expresión algebraica de cada relación.

BLOQUE 1

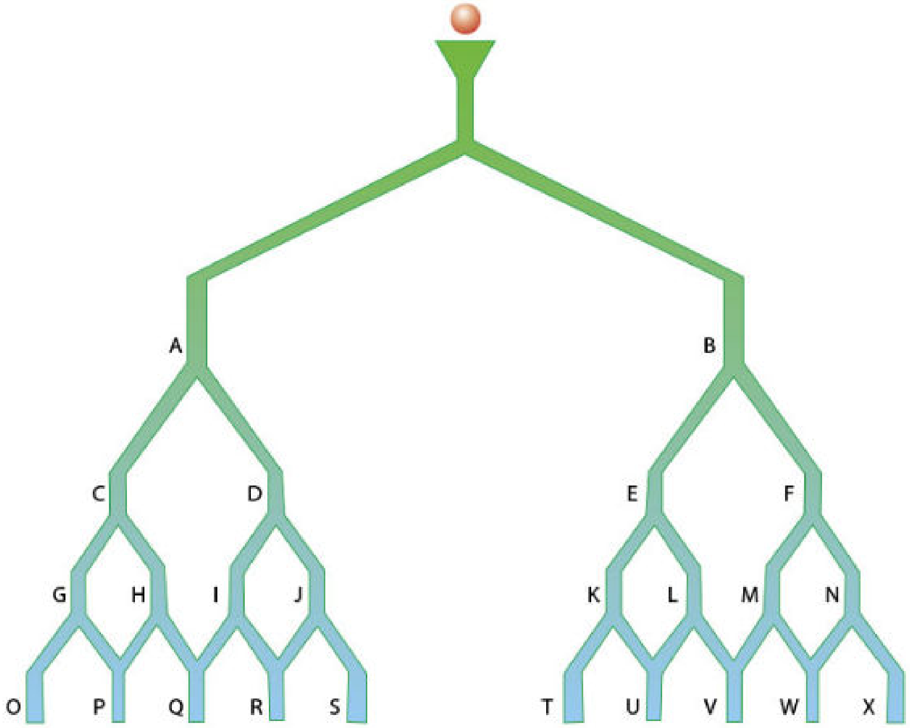
Secuencia 6 / lección 18

Laberinto de tubos

CONTENIDO Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

¿Puede haber probabilidades mayores a 100%? ¿En qué casos el hecho de que un evento ocurra influye en la posibilidad de que suceda otro? Al analizar un evento A, ¿te has fijado en el evento que consiste en que A no ocurra?

1. Se deja caer una canica por el orificio superior del siguiente laberinto de tubos.



Ya sabemos...

La probabilidad de un evento es la razón entre el número de resultados favorables y el de resultados posibles.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la canica caiga por el tubo A? ______

b) ¿Y de que caiga por el B? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la canica caiga por el tubo E? ______

d) ¿Y por el M? ______

e) Explica en tu cuaderno por qué la probabilidad de que la canica caiga por el tubo R es mayor que la probabilidad de que lo haga por el S. ______

f) Explica por qué la probabilidad de que la canica caiga por los tubos C, D, E o F es igual.

______

______

______

Reflexionamos

En una urna hay 3 bolas rojas, 2 verdes y 5 moradas. Si se toma una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea amarilla?

Si se suelta una canica en el orificio de arriba, es seguro que caiga por el tubo A o por el B. Numéricamente, esto se expresa de la siguiente manera.

Probabilidad de que caiga por A		Probabilidad de que caiga por B		Probabilidad de que caiga por A o por B
$\frac{1}{2}$	+	$\frac{1}{2}$	=	1

o bien,

Probabilidad de que caiga por A		Probabilidad de que caiga por B		Probabilidad de que caiga por A o por B
50%	+	50%	=	100%

Algo que tiene probabilidad 1, es seguro que ocurra, y si tiene probabilidad 0, es imposible que suceda.

2. Las siguientes sumas expresan el total de probabilidades en cada nivel del laberinto. Complétalas.

a) De A a B: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ o bien, 50% + 50% = 100%

b) De C a F: $\frac{1}{4}$ + — + — + — = 1 o bien, 25% + ___% + ___% + ___% = 100%

c) De G a N: — + — + — + — + — + — + — + — = 1 o bien,

___% + ___% + ___% + ___% + ___% + ___% + ___% + ___% = 100%

d) De O a X: — + — + — + — + — + — + — + — + — + — = 1 o bien,

___% + ___% + ___% + ___% + ___% + ___% + ___% + ___% +

___% + ___% = 100%

Reflexionamos

En algunos casos puede haber porcentajes mayores a 100%. Por ejemplo, el precio de un producto puede aumentar 120%. ¿Por qué no es posible tener una probabilidad mayor a 100%?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que la canica caiga por el tubo S? ______

a) ¿Y por el R? ______

b) ¿Por qué la probabilidad de que la canica caiga por el tubo W es el doble que la probabilidad de que lo haga por el X?

Como podrás notar, la medida de la probabilidad, cuando es de 0 a 1, se expresa con fracciones o decimales, mientras que, cuando es de 0 a 100%, se expresa con porcentaje.

BLOQUE 1

Secuencia 6 / lección 19

La ruleta I

CONTENIDO Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

En contexto

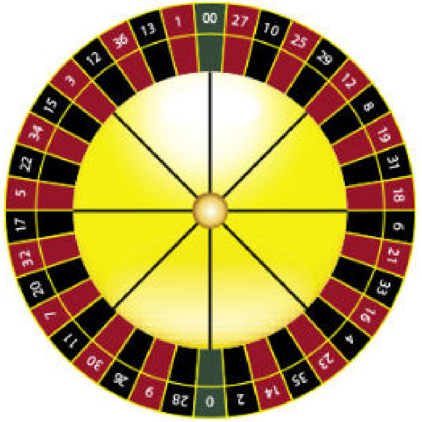
La función del 0 y el 00 es asegurar un margen de ganancia a las casas de apuestas. Estos números no se consideran pares ni impares, ni rojos o negros.

1. Los jugadores de la ruleta pueden colocar sus apuestas de varias maneras: apuestan a números individuales o a conjuntos de números. Anota al menos tres eventos diferentes en los que hagan apuestas con dichas especificaciones.

Evento 1: ______________________

Evento 2: ______________________

Evento 3: ______________________



conect@mos

Descarga la actividad sobre probabilidad en

www.redir.mx/SCM3A-054

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, comenten por qué la probabilidad de un evento siempre es un número entre 0 y 1.

2. Trabaja en equipo. Completen la tabla escribiendo la probabilidad de que un jugador gane con cada evento señalado.

Eventos	Probabilidad
A: "La ruleta se detiene en el 22".	
B: "La ruleta se detiene en color rojo".	
C: "La ruleta se detiene en color rojo o negro".	
D: "La ruleta se detiene en un número par".	
E: "La ruleta se detiene en un número impar".	
F: "La ruleta se detiene en el número 15".	
G: "La ruleta se detiene en un número menor que 10 y mayor que 0".	
H: "La ruleta se detiene en casilla verde".	
I: "La ruleta se detiene en un número distinto de 15".	

3. Trabaja en equipo. Completen la tabla.

Eventos	Resultados favorables	Probabilidad... con una razón	con una fracción	con un decimal
A o B	{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}	19 de 38	$\frac{19}{38}$	0.50
B o G				
A o B o G				
E o F				
B y D	{12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36}			
B y G				
D y F				
H e I				

* Compara tus resultados con los de tus compañeros. Después lean la siguiente información y úsenla para verificar sus respuestas de la tabla anterior.

La unión de dos eventos, X o Y, ocurre cuando sucede X o cuando sucede Y. La intersección, X y Y, se da cuando ocurren ambos. Los siguientes ejemplos demuestran lo anterior.
» El evento A o B ocurre cuando la ruleta se detiene en el número 22 o en color rojo.
» El evento B y D ocurre cuando la ruleta se detiene en color rojo y en número par.

4. Lee la información y haz lo que se pide.
El evento A es un evento simple porque sólo tiene un resultado favorable, mientras que tanto el B como el D son eventos compuestos, pues tienen más de un resultado favorable.

a) Determina, para cada evento de la tabla anterior, cuáles son simples y cuáles compuestos.

____

b) Escribe tres eventos simples y tres eventos compuestos que no aparezcan en las tablas anteriores.

____

* Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Secuencia 6 / lección 20

La ruleta II

CONTENIDO: Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

1. **Considera nuevamente la ruleta de la lección anterior. Resuelve lo siguiente.**
   a) En una jugada, la ruleta se detuvo en el número 6 y un jugador ganó. Anota tres eventos a los que el jugador pudo haber apostado.

   Evento 1: ______________________

   Evento 2: ______________________

   Evento 3: ______________________

   b) Un jugador apostó al evento F y otro, al evento G. ¿Podrían ganar ambos? __________

   ¿Por qué? ______________________

   c) Un jugador apostó al evento E y otro, al evento B. ¿Podrían ganar ambos? __________

   ¿Por qué? ______________________

   d) Inés y Sofía han hecho apuestas distintas, pero si la ruleta cae en 2, 4, 6 u 8, ganarán ambas. Anota en tu cuaderno, para cada una de ellas, una apuesta que podrían haber hecho.

   e) Nicolás y Alfredo han hecho apuestas distintas, y es imposible que ambos ganen. Anota en tu cuaderno, para cada uno de ellos, una apuesta que podrían haber hecho.

2. **En la siguiente tabla se muestran parejas de eventos relacionados con la ruleta de la lección anterior. Algunos tienen elementos en común y otros no.**

Eventos sin elementos en común	Eventos con elementos en común
A y B	D y G
D y E	B y G

   a) Inventa y escribe dos eventos distintos, J y K, que puedan ocurrir simultáneamente; y dos eventos distintos, L y M, que no puedan ocurrir al mismo tiempo.

   ____

* **Comenta, con tus compañeros y el profesor, la siguiente información. Úsenla para verificar sus respuestas de la actividad anterior.**

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando **no tienen elementos en común**, es decir, si **no pueden ocurrir al mismo tiempo**. Por ejemplo, los eventos A y B son mutuamente excluyentes, pues el número 22 no es rojo. En cambio, los eventos D y G no son mutuamente excluyentes, pues tienen en común los números pares menores que 10 (2, 4, 6 y 8).

3. **En la siguiente tabla se reunieron parejas de eventos complementarios y no complementarios de la ruleta y del laberinto de tubos.**

	Eventos complementarios	Eventos no complementarios
Lección 19	eventos C y H	eventos B y D
	eventos F e I	eventos I y E
Lección 20	La canica pasa por A. La canica pasa por B.	La canica pasa por C. La canica pasa por D.
	La canica pasa por C o D. La canica pasa por E o F.	La canica pasa por B. La canica pasa por C, D o E.

Ya sabemos...

El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles; por ejemplo, el espacio muestral del lanzamiento de dos monedas es {AA, AS, SA, SS}.

   a) Inventa dos eventos complementarios para la ruleta.

   ______________ y ______________

   b) En las parejas de eventos de la tabla anterior, encuentra un ejemplo para cada caso.

   » Dos eventos que abarquen todo el espacio muestral y tengan elementos en común
   » Dos eventos que abarquen todo el espacio muestral pero sin elementos en común
   » Dos eventos con elementos en común y que no abarquen todo el espacio muestral
   » Dos eventos sin elementos en común y que no abarquen todo el espacio muestral

* **Comenta la siguiente información con tus compañeros y el profesor. Úsenla para verificar su respuesta al inciso a) y describir el complementario de los siguientes eventos de la lección 18.**

   La canica pasa por C. La canica pasa por H. La canica pasa por Q.

Si dos eventos, **X y Y**, abarcan **todo el espacio muestral y carecen de elementos comunes**, son **complementarios**. Por ejemplo, los eventos **C y H** son complementarios, pues **H** tiene todos los resultados que no están en **C** (los resultados que no son rojos o negros son forzosamente verdes), y viceversa.

4. **Anota en tu cuaderno un ejemplo para cada uno de los siguientes casos. Si consideras que alguno no se puede ejemplificar, explica por qué.**
   a) Dos eventos mutuamente excluyentes, pero no complementarios
   b) Dos eventos complementarios, pero no mutuamente excluyentes

* **Comenta, en grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información. Después determinen qué incisos de la actividad 1 corresponden a eventos mutuamente excluyentes.**

Dos **eventos complementarios** nunca tienen elementos en común, por lo que forzosamente son **mutuamente excluyentes**. En cambio, **hay eventos mutuamente excluyentes** que no abarcan todo el espacio muestral, **así que no son complementarios**, como los eventos D y E de la lección anterior.

BLOQUE 1

Secuencia 6 / lección 21

¿El resultado depende de los anteriores?

CONTENIDO: Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

1. Trabaja en equipo. Analicen la siguiente información.

Para salir del aeropuerto en viajes internacionales, hay que apretar el botón de un semáforo; si se prende el foco rojo, los guardias revisan el equipaje; si lo hace el verde, no. El semáforo funciona de manera que es igualmente probable que se prenda cualquier foco. Entonces, si se ha encendido el foco verde con cuatro personas consecutivas, ¿la probabilidad de que se encienda nuevamente con la siguiente persona es $\frac{1}{2}$, más de $\frac{1}{2}$ o menos de $\frac{1}{2}$?

a) Expliquen si están de acuerdo o no con cada respuesta.

» Como se ha encendido la luz verde con las últimas cuatro personas, hay una "buena racha" de luces verdes; por eso es muy probable que a la siguiente persona también le corresponda dicha luz. Es decir, la probabilidad de que nuevamente se prenda la luz verde es mayor que $\frac{1}{2}$.

____

» Como la probabilidad de que se encienda cada luz es de 50%, se espera que, al apretar muchas veces el botón, aproximadamente la mitad de las veces se encienda la luz verde y la otra mitad, la roja. Pero como se ha prendido la luz verde con la últimas cuatro personas, ya es momento de que se encienda la roja para compensar; por tanto, es poco probable que se prenda la luz verde con la siguiente persona. Es decir, la probabilidad de que nuevamente se encienda la luz verde es menor que $\frac{1}{2}$.

____

» Cada vez que se aprieta el botón, la probabilidad de que se encienda el foco verde es 50%; esto no tiene nada que ver con la cantidad de veces que haya salido anteriormente. Así, la probabilidad de que nuevamente se prenda la luz verde es exactamente $\frac{1}{2}$.

____

Ya sabemos...

Entre más veces se repite un experimento, la frecuencia relativa se aproxima cada vez más a la probabilidad teórica.

- **Revisen, con ayuda del profesor, sus respuestas. No es necesario que lleguen a un acuerdo por ahora, pero sí que planteen claramente las distintas opiniones.**

2. En el problema de la actividad anterior, si el foco se prende una vez, el espacio muestral es {verde, rojo}. Determina el espacio muestral del experimento en los siguientes casos.

a) Al prender el foco dos veces: ______________________________

b) Al prender el foco tres veces: ______________________________

c) Al prender el foco cuatro veces: ______________________________

d) Al prender el foco cinco veces: ______________________________

Ya sabemos...

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se le llama espacio muestral.

e) Calcula, para cada inciso anterior, la probabilidad de que la última vez que se encienda el foco salga luz verde. Anota los resultados en tu cuaderno.

- **Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Noten, en particular, que hay distintas maneras de representar los espacios muestrales; platiquen cuáles les parecen más prácticas. Después comenten la siguiente información.**

Si aumenta el número de veces que se prende el foco, cambia el número de resultados posibles y también el de resultados favorables; pero la probabilidad de que la última vez se encienda el verde, es decir, **la razón entre los resultados favorables y los posibles se conserva:**

» $\frac{1}{2}$ si el foco se prende una vez: {V,R};

» $\frac{2}{4}$ si se prende dos veces: {VV, VR, RV, RR};

» $\frac{4}{8}$ con tres veces: {VVV, VVR, VRV, VRR, RVV, RVR, RRV, RRR};

» $\frac{8}{16}$ para cuatro veces: {VVVV, VVVR, VVRV, VVRR, VRVV, VRVR, VRRV, VRRR, RVVV, RVVR, RVRV, RVRR, RRVV, RRVR, RRRV, RRRR}.

En todos los casos, **en la mitad de los resultados posibles a la última persona le corresponde luz verde.** Por eso se puede afirmar que, si hay una fila de personas esperando para apretar el botón, **la última tiene 50% de probabilidad** de que no le revisen el equipaje, **sin importar qué tan larga sea la fila.**

3. Supón que hay cinco personas en la fila esperando para tocar el botón. Calcula en tu cuaderno la probabilidad de que se prenda la luz verde con la última persona si…

» pasa la primera persona y sale luz verde,
» pasan la primera y la segunda persona y se prende la luz verde,
» pasan las primeras tres personas y sale luz verde,
» pasan las primeras cuatro personas y les corresponde luz verde.

- **Comenta con tus compañeros la siguiente información. Después revisen nuevamente las opiniones que dieron en la actividad 1 y, ahora sí, lleguen a una conclusión común.**

Al aumentar la cantidad de personas a las que previamente les salió luz verde, **las cantidades de resultados posibles y de resultados favorables disminuyen** en cada caso (a la mitad), **pero como la razón entre ellas se conserva,** la **probabilidad de que a la última persona le corresponda luz verde no cambia:**

» $\frac{8}{16}$ si a la primera persona le salió luz verde: {VVVVV, VVVVR, VVVRV, VVVRR, VVRVV, VVRVR, VVRRV, VVRRR, VRVVV, VRVVR, VRVRV, VRVRR, VRRVV, VRRVR, VRRRV, VRRRR};

» $\frac{4}{8}$ si a las dos primeras les correspondió luz verde: {VVVVV, VVVVR, VVVRV, VVVRR, VVRVV, VVR-VR, VVRRV, VVRRR};

» $\frac{2}{4}$ si se prendió la luz verde con las tres primeras: {VVVVV, VVVVR, VVVRV, VVVRR};

» $\frac{1}{2}$ si a las primeras cuatro les salió luz verde: {VVVVV, VVVVR}.

En todos los casos, **en la mitad de los resultados posibles a la última persona le corresponde luz verde.** Por tanto, la última persona tiene **50% de probabilidad** de que no le revisen el equipaje, **sin importar cuántas veces se haya encendido antes la luz verde.**

Secuencia 6 / lección 22

Dependientes o independientes

CONTENIDO
Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

1. Trabaja en equipo. Analicen los siguientes casos y respondan las preguntas.

Caso 1	Caso 2
En una prueba de opción múltiple, Luis contestó al azar dos reactivos. Cada uno tenía cuatro opciones, de las cuales sólo una era correcta. Si Luis acertó en la primera pregunta, ¿la probabilidad de que lo haya hecho en la otra es $\frac{1}{4}$, más de $\frac{1}{4}$ o menos de $\frac{1}{4}$? ______	Carlos lanzó tres veces una moneda y en todas cayó águila; Jesús hizo lo mismo y obtuvo águila-sol-sol. Ambos lanzarán su moneda una cuarta vez. ¿Quién tiene más probabilidad de obtener sol? ______

a) Calculen, para el caso 1, la probabilidad de…

» acertar al responder al azar una pregunta con cuatro opciones de respuesta en la que sólo una de ellas es correcta; ______________________________

» acertar al responder al azar una segunda pregunta con cuatro opciones si ya se respondió correctamente la primera. ______________________________

b) Calculen, para el caso 2, la probabilidad de…

» lanzar cuatro volados y obtener sol en el último; ______________________

» lanzar un volado y obtener sol, si los tres anteriores fueron águila; ____________

» lanzar un volado y obtener sol, si los tres anteriores fueron águila-sol-sol. ________

* Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus resultados. Cuando determinen las respuestas correctas, verifiquen que concuerden con sus conclusiones de la lección anterior.

2. Considera el laberinto de tubos de la lección 18.

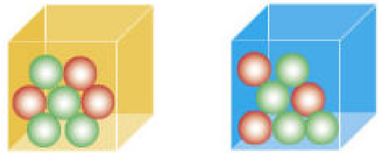
a) Al inicio del experimento, es decir, antes de soltar la canica, ¿qué probabilidad hay de que pase por el tubo Q? ______

b) Si se suelta la canica y pasa por A, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a Q? ______

c) Si la canica ya pasó por C, ¿cuál es la probabilidad de que termine en Q? ______

d) Si la canica ya pasó por G, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en Q? ______

3. Se tienen dos urnas con siete pelotas. En la urna azul se hacen extracciones con remplazo, es decir, cada vez que se saca una bola, ésta se regresa a la urna y puede ser tomada la siguiente vez. En la urna amarilla se hacen extracciones sin remplazo.



» Calcula y escribe en la siguiente tabla las probabilidades que se piden.

Probabilidad de…	Urna amarilla	Urna azul
obtener bola roja en la primera extracción		
obtener bola verde en la primera extracción		
obtener bola roja en la segunda extracción, si en la primera se obtuvo una roja		
obtener bola roja en la segunda extracción, si en la primera se obtuvo una verde		

En contexto

Para ampliar tus conocimientos sobre probabilidad y estadística con datos interesantes y concretos, lee *Esa condenada mala suerte*, de la Biblioteca de Aula.

Poskitt, Kjartan, *Esa condenada mala suerte*, México, SEP-Abrapalabra Editores, serie Espejo de Urania, 2005.

* Valida, con el grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 2 y 3. Discutan, en el caso de la 2, por qué cambian las probabilidades a medida que la canica avanza por el laberinto; y en la 3, por qué las probabilidades son distintas en cada urna. Después comenten la siguiente información y respondan en su cuaderno.

Dos eventos X y Y son **independientes** cuando **la probabilidad de que ocurra X es la misma si sucede Y o no.** Es decir, **la probabilidad de X no depende de la ocurrencia de Y** o, dicho en otras palabras, el hecho de que suceda **Y no cambia la probabilidad** de que lo haga X.

» ¿La probabilidad de obtener águila en un volado depende de lo que se ha obtenido en volados anteriores?
» En el laberinto de tubos, ¿el tubo en el que cae finalmente la canica depende de si pasa por A o por B?
» En una extracción con remplazo, ¿las probabilidades para la segunda bola son distintas que las de la primera?
» En una extracción sin remplazo, ¿las probabilidades para la segunda bola son distintas que las de la primera?

4. Elabora, en tu cuaderno, un resumen en el que definas los siguientes conceptos. Proporciona ejemplos de cada uno.
» Eventos complementarios
» Eventos mutuamente excluyentes
» Eventos independientes

Preguntas adecuadas y no tan adecuadas

CONTENIDO Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación

Para saber algo se puede recabar información mediante preguntas, pero ¿con qué preguntas se obtiene información precisa y confiable?, ¿cómo se determina a la población que conviene entrevistar?, ¿cuál es la manera más adecuada para presentar resultados?

1. Contesta el cuestionario.

Nombre: ____________________

a) ¿Cuál es tu estatura? __________

b) ¿Estudias mucho? __________

c) ¿Qué deporte te gusta más? __________

d) ¿Tienes letra bonita? __________

e) ¿Cuántas habitaciones hay en tu casa? __________

2. **Reúnete con algunos compañeros. Comparen sus respuestas y resuelvan lo que resta de la lección.**

3. **Respondan de acuerdo con el inciso a) de la actividad anterior.**

a) ¿La medida que anotó cada uno corresponde con su estatura al usar zapatos o no, o con ellos en algunos casos y sin ellos en otros? __________

b) ¿Hace cuánto tiempo se midió cada uno? __________

c) ¿Hubo alguien que no supiera su estatura y dio un número aproximado? ¿Quién? __________

d) Si quisieran saber con certeza la estatura actual de cada uno, ¿sería conveniente tener en cuenta lo que contestaron en el cuestionario? __________

e) ¿Cómo podrían recabar información precisa y confiable sobre la estatura de cada uno? __________

4. **Supongan que un equipo de cuatro alumnos respondió lo siguiente en el inciso b) del cuestionario.**

Alumno A: Sí (no estudia en las tardes, pero considera que pasar toda la mañana en la escuela es estudiar mucho).

Alumno B: Sí (además de asisitir a la escuela, todas las tardes estudia un promedio de tres horas).

Alumno C: No (sólo estudia en la escuela; al llegar a casa no abre ni un libro).

Alumno D: No (estudia todas las tardes, pero considera insuficientes sus esfuerzos porque su hermano estudia una hora más que él).

a) Comparen sus respuestas con las del ejemplo anterior y comenten si los criterios para decidir si estudian mucho o no son los mismos.

b) ¿La pregunta en sí permite averiguar quiénes estudian mucho y quiénes no? __________

c) Si quisieran saber cuánto estudia en realidad cada uno, ¿qué pregunta formularían? __________

* **Comenten las preguntas c), d) y e) del cuestionario. Anoten en su cuaderno para qué podrían servir las respuestas y cómo investigarían esos datos de manera adecuada.**

conect@mos

Observa ejemplos de encuestas reales en

www.redir.mx/SCM3A-063

Trabaja en equipo. Busquen una encuesta de algún tema de su interés y analicen los datos presentados. Muestren al grupo los resultados de su análisis y comenten qué dificultades encontraron al trabajar con ella.

Un cuestionario es útil para recabar información. Sin embargo, hay que tener en cuenta lo siguiente.

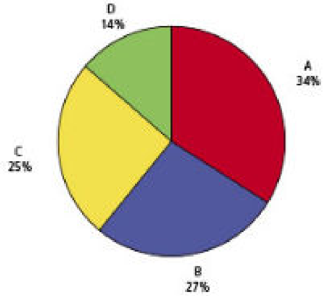
- Es necesario plantear las preguntas de acuerdo con el propósito que se persigue.
- Para obtener datos puntuales, se debe preguntar exactamente lo que se desea saber; las preguntas deben ser cortas, fáciles de entender y de responder, de tal manera que la respuesta sea lo más precisa posible.
- Es recomendable probar el cuestionario con algunas personas y, en caso necesario, modificar o agregar preguntas antes de aplicarlo a la población de muestra.
- En algunas ocasiones es mejor recabar información de manera directa en lugar de hacer preguntas (como en el caso de las estaturas de los alumnos).

La presentación más adecuada

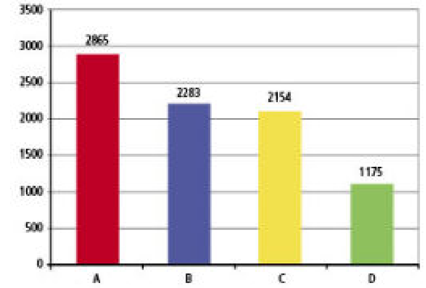
CONTENIDO Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación

1. **Los siguientes resultados fueron tomados de una encuesta efectuada a estudiantes de distintas escuelas.**
Las respuestas corresponden a la pregunta "¿Cuál es tu superhéroe favorito?" Ésta tiene cuatro opciones de respuesta (A, B, C y D), de entre las cuales la persona encuestada debe elegir una. Trabaja en equipo. Discutan y anoten en su cuaderno qué manera es la más adecuada para presentar los resultados de la encuesta y por qué. ¿cuáles son las ventajas y las desventajas de cada presentación?

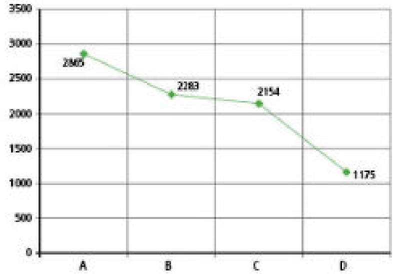
I ¿Cuál es tu superhéroe favorito?



II ¿Cuál es tu superhéroe favorito?



III ¿Cuál es tu superhéroe favorito?



IV ¿Cuál es tu superhéroe favorito?

A	2 865
B	2 283
C	2 154
D	1 175

a) Dos presentaciones prácticamente muestran lo mismo. ¿Cuáles son? ______

b) Una presentación no muestra la cantidad de personas entrevistadas. ¿Cuál es? ______

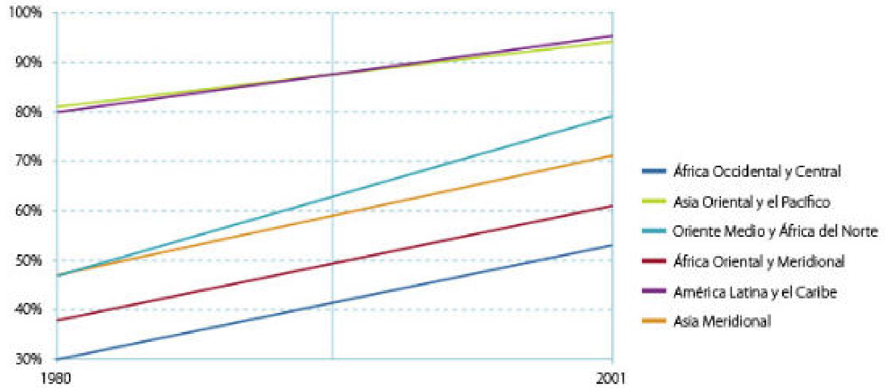
c) Una presentación muestra claramente qué parte de los votos obtuvo cada superhéroe; por ejemplo, indica que A fue el favorito de poco más de $\frac{1}{3}$ de los encuestados, mientras que una de cada cuatro personas eligió a C. ¿Cuál es esa presentación? ______

d) En otra presentación, no es fácil identificar a primera vista qué parte de los votos obtuvo cada superhéroe. ¿En cuál ocurre esto? ______

2. **Trabaja en equipo. Lean la información y respondan en su cuaderno.**

En el año 2000 la Organización de las Naciones Unidas (ONU) fijó ocho objetivos con el fin de mejorar la calidad de vida de los ciudadanos del mundo. Uno de esos objetivos es garantizar que, para el año 2015, todos los niños del planeta tengan la oportunidad de terminar la escuela primaria.

La gráfica muestra, con datos agrupados por regiones, qué porcentaje del total de niñas en edad escolar asistían o estaban inscritas en la escuela primaria durante el periodo 1980-2001.



En contexto

Nosotros luchamos por conseguir que un día no se mida a las naciones por su poder militar o económico ni por el esplendor de sus capitales ni los edificios públicos, sino por el bienestar de sus niños y niñas.

UNICEF, *Progreso para la infancia*, vol. 1, "Un informe sobre la supervivencia de la niñez", 2004.

a) Si consideran únicamente los datos de 1980, ¿qué región estaba más rezagada para alcanzar el objetivo: Asia Meridional u Oriente Medio y África del Norte?

b) Si consideran únicamente los datos de 2001, ¿qué región estaba más cerca de alcanzar el objetivo: Asia Oriental y el Pacífico o América Latina y el Caribe?

c) Considerando los datos de todo el periodo (1980-2001), ¿qué región ha tenido mayor avance en cuanto al objetivo propuesto?

d) Si la tendencia de cada gráfica continúa, es decir, si la asistencia/matriculación sigue aumentando al mismo ritmo, ¿qué regiones lograrán alcanzar el objetivo en 2015?

* **Comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de esta lección. Respecto a la actividad 1, discutan las ventajas y desventajas de cada representación; en cuanto a la 2, comenten las ventajas de analizar los datos de todo el periodo en lugar de examinar sólo los de algún año en particular. Al finalizar, lean la siguiente información y contrástenla con el análisis que ustedes efectuaron.**

Al analizar los resultados de una investigación es importante no omitir datos relevantes; por ejemplo, en la actividad anterior no basta analizar únicamente los datos de 1980 o 2001, ya que esto pueden inducir a conclusiones erróneas o incompletas; en cambio, los datos de todo el periodo proporcionan una mejor idea de cómo ha aumentado el porcentaje de alumnos en cada región.

También es importante la manera en que se expone la información; por ejemplo, las cuatro representaciones de la actividad 1 presentan información verdadera, pero cada una resalta cosas distintas: la gráfica circular muestra el porcentaje de personas que prefieren a cada superhéroe, mientras que la tabla, sólo la cantidad de votos que obtuvo cada uno.

Secuencia 7 / lección 25

Comunicación de resultados

CONTENIDO
Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación

1. **Considera la pregunta a) del cuestionario en la lección "Preguntas adecuadas y no tan adecuadas". Supón que se quieren conocer las estaturas para un estudio acerca del crecimiento de los adolescentes en México.**

   a) Escribe en tu cuaderno si estás de acuerdo con cada frase y explica por qué.
   - » Si se miden a estudiantes, conviene también medir a los profesores para tener una población más grande.
   - » Es importante medir a adolescentes de distintas edades, por ejemplo, alumnos de los tres grados de secundaria.
   - » No conviene medir a adolescentes de distintas edades porque alguien de 12 años de edad puede ser mucho más alto que un alumno de 14, y eso puede generar datos confusos o falsos. Es mejor medir a un grupo de niños de 10 años de edad varias veces durante cuatro años.
   - » Es importante medir a jóvenes de un solo estrato social; por ejemplo, de nivel socioeconómico medio.
   - » Es importante medir a adolescentes de entornos en los que hay desnutrición, y en los que no la hay.

   b) El entorno socioeconómico al cual pertenecen los adolescentes que se miden también influye en los resultados. Responde en tu cuaderno lo siguiente.
   - » Menciona tres lugares en los que te convendría medir las estaturas para saber si los adolescentes han tenido un crecimiento adecuado o no.
   - » Menciona tres lugares en los que te convendría medir las estaturas para saber si hay desnutrición entre la población adolescente.

2. **Irene y Julián son periodistas. Ella considera que si un alumno no tiene buenos resultados en la escuela es porque es flojo; Julián quiere demostrar que una escuela imparte una buena formación a sus alumnos sin necesidad de dejar tareas. Los dos han entrevistado a varios estudiantes; entre otros aspectos, les han preguntado cuántas horas al día estudian, sin contar el tiempo en clase.**

   a) Explica qué tipo de estudiantes le conviene entrevistar a cada uno (con excelente desempeño o con distintos niveles de rendimiento; de una misma escuela o de distintas; de lugares elegidos aleatoriamente o con base en algún criterio; etcétera).

- **Comenta tus resultados de las actividades 1 y 2 con tus compañeros. Después lean la siguiente información.**

Los resultados que se obtienen en una encuesta o estudio están estrechamente relacionados con el tamaño (cantidad de personas) y las características de la población que se entrevista o toma como muestra. Por eso, para que un estudio sea confiable, es importante elegir adecuadamente la población.

3. **Trabaja en equipo. Hagan un estudio mediante un cuestionario corto. Éste puede tener una sola pregunta.**

   Tarea 1. Discutan qué problema les gustaría investigar o qué información les interesaría conocer. Ésta puede ser acerca del grupo, la escuela o la comunidad. Describan brevemente el problema en su cuaderno.

   Tarea 2. Redacten la(s) pregunta(s) de su cuestionario.

   Tarea 3. Anoten a cuántas y a qué personas aplicarán el cuestionario.

- **Informen a todos sus compañeros lo que acordaron para las tareas 1, 2 y 3. Comenten los proyectos en grupo; propongan mejoras y hagan las modificaciones necesarias. Cuando estén de acuerdo, continúen con las siguientes tareas. Éstas les llevarán varios días, así que pónganse de acuerdo con el profesor sobre las fechas en que presentarán sus resultados.**

   Tarea 4. Organícense en el equipo para recabar la información necesaria.

   Tarea 5. Organicen la información recabada en tablas y gráficas (del tipo que consideren pertinente).

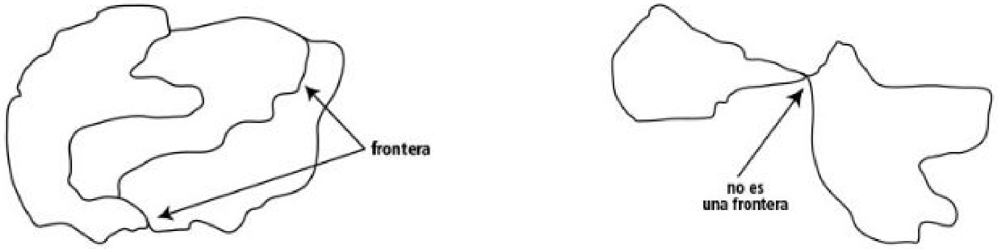
   Tarea 6. Expongan frente al grupo los resultados a los que hayan llegado.

- **Discutan acerca de los proyectos presentados. Hagan, entre todos, un periódico mural para comunicar los resultados.**

Los mapas[1]

¿Cuál es el menor número de colores con el que se puede colorear el mapa de la República Mexicana, teniendo en cuenta que dos estados que comparten frontera no deben colorearse del mismo color? Averígualo; colorea el mapa de abajo y muestra tu solución a algún compañero.

Recuerda: se considera que dos estados comparten frontera cuando tienen una línea común, no cuando únicamente coinciden en un punto.



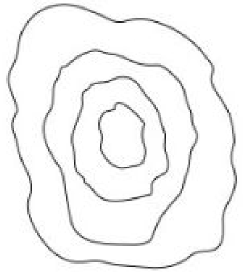
¿Cuántos colores usaste para colorear el mapa? ¿Esa será la mínima cantidad necesaria?

En 1852 un estudiante inglés, Francis Guthrie, notó, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, que bastaban cuatro colores para que las regiones con frontera común tuvieran colores diferentes. Al intuir que su descubrimiento podía aplicarse a cualquier mapa, se lo contó a su antiguo profesor de matemáticas, Augustus de Morgan. Desde entonces, el problema de los cuatro colores se convirtió formalmente en un problema matemático que muchas personas (matemáticos y no) intentaron resolver.

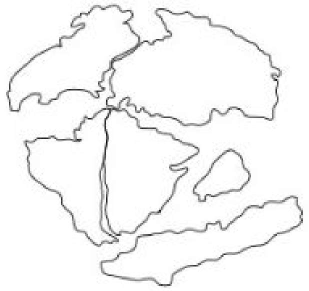
[1]Información adaptada de redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/nombres/mate1o.htm

¿Algunos mapas se podrían colorear con menos de cuatro colores si se considera el problema anteriormente descrito? Inténtalo con las siguientes superficies divididas.

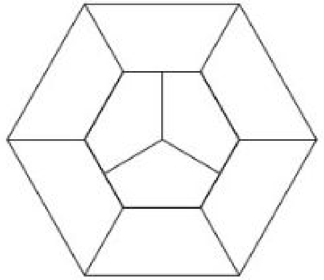
Número de colores: ____________



Número de colores: ____________



Número de colores: ____________



Número de colores: ____________

En un principio, varias personas creyeron haber resuelto el problema y, aunque las soluciones tenían errores o estaban incompletas, su trabajo permitió demostrar dos cosas fundamentales:

- tres colores son insuficientes para colorear cualquier mapa, es decir, existen mapas que no se pueden colorear con sólo tres colores si se pretende respetar la regla concerniente a las fronteras;
- cinco colores son suficientes para colorear cualquier mapa, es decir, no existe un mapa que requiera más de cinco colores para colorearlo según la regla ya referida.

Como cinco colores bastaban para colorear un mapa adecuadamente, pero tres eran insuficientes, el número cuatro era el candidato ideal… Había entonces que probar o refutar la teoría.

Fue hasta 1976 (¡124 años después de que se propuso el problema!) que Kenneth Appel y Wolfgang Haken, ambos de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, en Estados Unidos de América, demostraron que cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa. A partir de entonces, el problema de los cuatro colores se convirtió en el teorema de los cuatro colores. Así acaba esta historia, pues hasta ahora nadie ha refutado dicha demostración.

Selecciona la opción correcta.

1. Si la expresión $\frac{(n-3)n}{2}$ permite calcular el número de diagonales de un polígono regular de n lados, ¿cuántos lados tiene un polígono regular con 119 diagonales?

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18

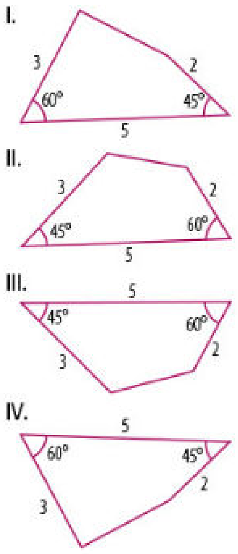
2. ¿Qué afirmación es falsa?

a) Dos figuras semejantes tienen ángulos correspondientes iguales.

b) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

c) Todos los triángulos rectángulos son semejantes entre sí.

d) Todos los cuadrados son semejantes entre sí.



3. Observa las figuras de la izquierda. ¿Cuáles son polígonos congruentes?

a) I y IV b) I y II c) I y III d) II y IV

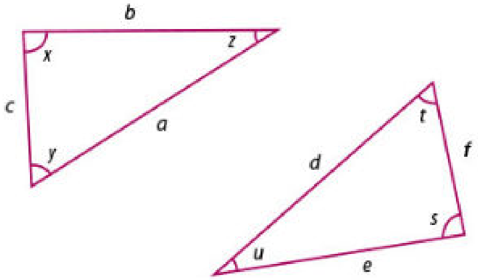
4. ¿En qué inciso se muestran condiciones suficientes para que los triángulos ABC y DEF sean congruentes?

a) $c = f, \quad b = e, \quad z = u$

b) $x = s, \quad y = t, \quad z = u$

c) $c = f, \quad b = e, \quad x = s$

d) $a = b, \quad e = f, \quad u = y$



x	y
1.5	91.5
2.0	122
2.5	152.5

5. ¿A qué relación (x, y) corresponde la tabla de la izquierda?

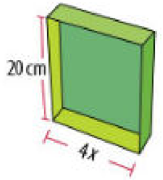
a) La cantidad de días (y) que tardan x obreros en construir un edificio.

b) La distancia que recorre un tren (y) durante un tiempo x a velocidad constante.

c) El área de un cuadrado (y) cuyo lado mide x unidades.

d) El gasto en gasolina (y) de un coche en el que viajan x personas.

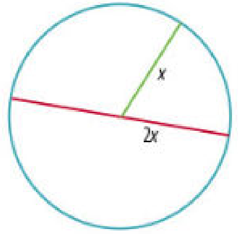
6. Un fabricante de cereal planea vender su producto en cajas como la de la derecha, en la que el largo mide cuatro veces el ancho, y la altura, 20 cm. Si x representa el ancho de la caja, ¿qué expresión permite calcular el volumen?



a) $V = 4x^2$ b) $V = 8x^2$

c) $V = 20x^2$ d) $V = 80x^2$

7. ¿Qué expresión permite calcular el área (y) del siguiente círculo?



a) $y = 3x^2$ b) $y = 2\pi x^2$

c) $y = \pi x^2$ d) $y = (3\pi x)^2$

8. ¿En qué inciso se expresan dos eventos, J y K, complementarios respecto al lanzamiento de un dado?

a) Evento J = cae 5 o 6. Evento K = cae un número menor que 5.

b) Evento J = cae un número non. Evento K = cae un número mayor que 2.

c) Evento J = cae 4. Evento K = cae 6.

d) Evento J = cae un número mayor que 3. Evento K = cae un número menor que 3.

9. Se ha lanzado una moneda dos veces. ¿Qué afirmación es verdadera?

a) Si en el primer volado cayó sol, es más probable que caiga águila en el segundo.

b) Si en el primer volado cayó sol, es menos probable que caiga sol en el segundo.

c) Si en el primer volado cayó águila, casi es seguro que en el segundo caiga sol.

d) El hecho de que en el primer volado cayera águila no influye en el resultado del segundo.

10. En un cine se le preguntó a los primeros 10 clientes del día su opinión acerca del servicio y la calidad de las películas exhibidas. ¿Por qué los resultados de la encuesta son poco confiables?

a) Porque no se preguntó acerca de la película favorita.

b) Porque se preguntó a pocos clientes.

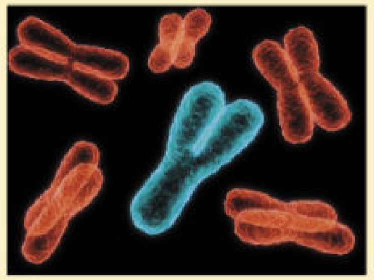
c) Porque la encuesta tenía sólo dos preguntas.

d) Porque no se preguntó a todos los clientes.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

¿Niña o niño?



Nuestro ADN está organizado en cromosomas, que determinan muchos rasgos del ser humano: hay dos cromosomas en particular, llamados X y Y, que determinan el sexo de un bebé. Las mujeres tienen dos cromosomas X, y durante la fecundación transmiten al embrión uno u otro con la misma probabilidad. Los hombres, por su parte, tienen un cromosoma X y uno Y, y también aportan uno u otro con la misma probabilidad. El resultado es una pareja de cromosomas, que podrá ser XX o XY. Si el producto es XX, el embrión será una niña; si es XY, un niño.

Pregunta 1. Al momento de la fecundación, ¿cuál es la probabilidad de que el embrión sea niña? ¿Y de que sea niño? ¿Son eventos con la misma probabilidad?

Pregunta 2. ¿Los eventos "niña" y "niño" son independientes?, ¿son mutuamente excluyentes? Justifica tu respuesta.

Pregunta 3. Si una pareja tuvo un primer hijo varón, ¿qué probabilidad hay de que su próximo hijo también sea varón?

a) 1 b) Más de $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) Menos de $\frac{1}{2}$

Pregunta 4. Cuenta el número de mujeres que hay en tu escuela. ¿La frecuencia relativa es 50%? Si no es así, ¿a qué atribuyes la diferencia?

Pregunta 5. ¿Dónde es más probable que los nacimientos de niñas sean cercanos a 50%, en una comunidad pequeña o en una grande?

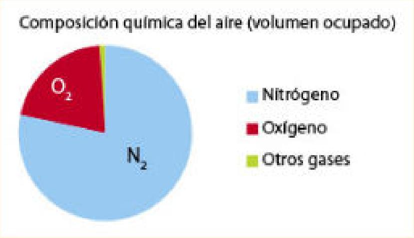
a) En una comunidad pequeña. b) En una comunidad grande. c) En ambas es igual de probable. d) No puede saberse.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Manejar técnicas eficientemente

El aire que respiramos

En la capa más baja de la atmósfera, la troposfera, hay condiciones adecuadas para el desarrollo de la vida. En esta zona se encuentran las nubes y casi todo el vapor de agua, y la composición del aire es aproximadamente de cuatro partes de nitrógeno por una de oxígeno. Exceptuando el N_2 y el O_2, el resto de los gases constituye una parte mínima del aire.



Pregunta 1. En la gráfica circular se muestra el porcentaje del volumen que ocupa cada gas en el aire. Utilízala para completar la tabla de la derecha.

Gas	Porcentaje
nitrógeno	
oxígeno	
otros	1%

Pregunta 2. En una habitación pequeña caben 12 000 l de aire. ¿Cuántos litros corresponden a cada gas?

Pregunta 3. Uno de los gases comprendidos en el área verde de la gráfica circular es el dióxido de carbono (CO_2), cuyo porcentaje en el aire es aproximadamente 0.04%. ¿Por qué no se incluyó en la gráfica la parte correspondiente a este gas?

Pregunta 4. ¿Por qué una gráfica de barras no resulta adecuada para representar estos datos?

Pregunta 5. ¿Qué expresión algebraica muestra la proporción entre las cantidades de oxígeno (o) y nitrógeno (n) en el aire?

a) $o = 4n$ b) $o = 5n$ c) $n = 4o$ d) $n = 5o$

Autoevaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si resuelves esta actividad con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas.				
Trazo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades.				
Identifico las propiedades de las figuras congruentes o semejantes.				
Uso los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.				
Interpreto representaciones gráficas, tabulares y algebraicas, que corresponden a una misma situación.				
Identifico las representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que corresponden a una relación de proporcionalidad.				
Represento relaciones de variación cuadrática por medio de tablas y expresiones algebraicas.				
Interpreto y uso la escala de la probabilidad.				
Identifico las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.				
Explico la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.				
Diseño una encuesta o un experimento y represento los resultados.				
Identifico la población de estudio en una encuesta o un experimento. Interpreto los datos de una muestra.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas				

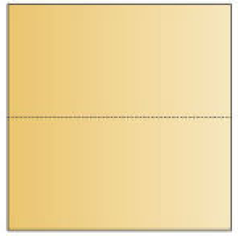
Para concluir tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades? ¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ______

Y para terminar...

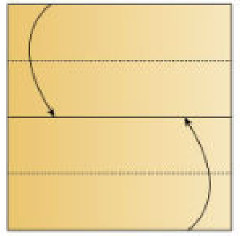
Hagamos un cubo con papiroflexia

Necesitas seis cuadrados de papel de colores. En cada uno haz los siguientes dobleces.

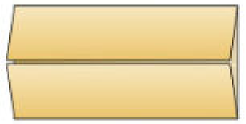
1. Marca con un doblez una línea que divida el cuadrado a la mitad.



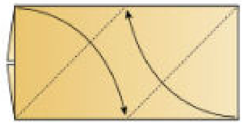
2. En cada mitad haz otro doblez y lleva los dos lados hacia el primer doblez en forma horizontal, como se indica.



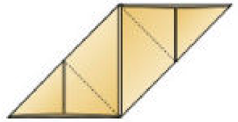
3. Obtendrás una figura como la siguiente.



4. Voltea la figura y haz dos dobleces diagonales, uno ascendente y otro descendente, como los siguientes.

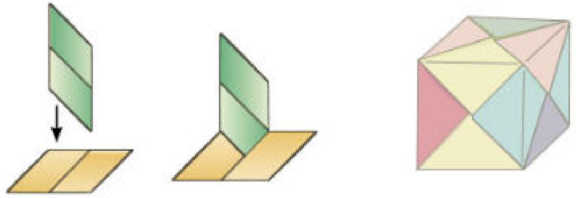


5. Obtendrás la siguiente figura. Ahora marca dos dobleces más donde indican las líneas punteadas.



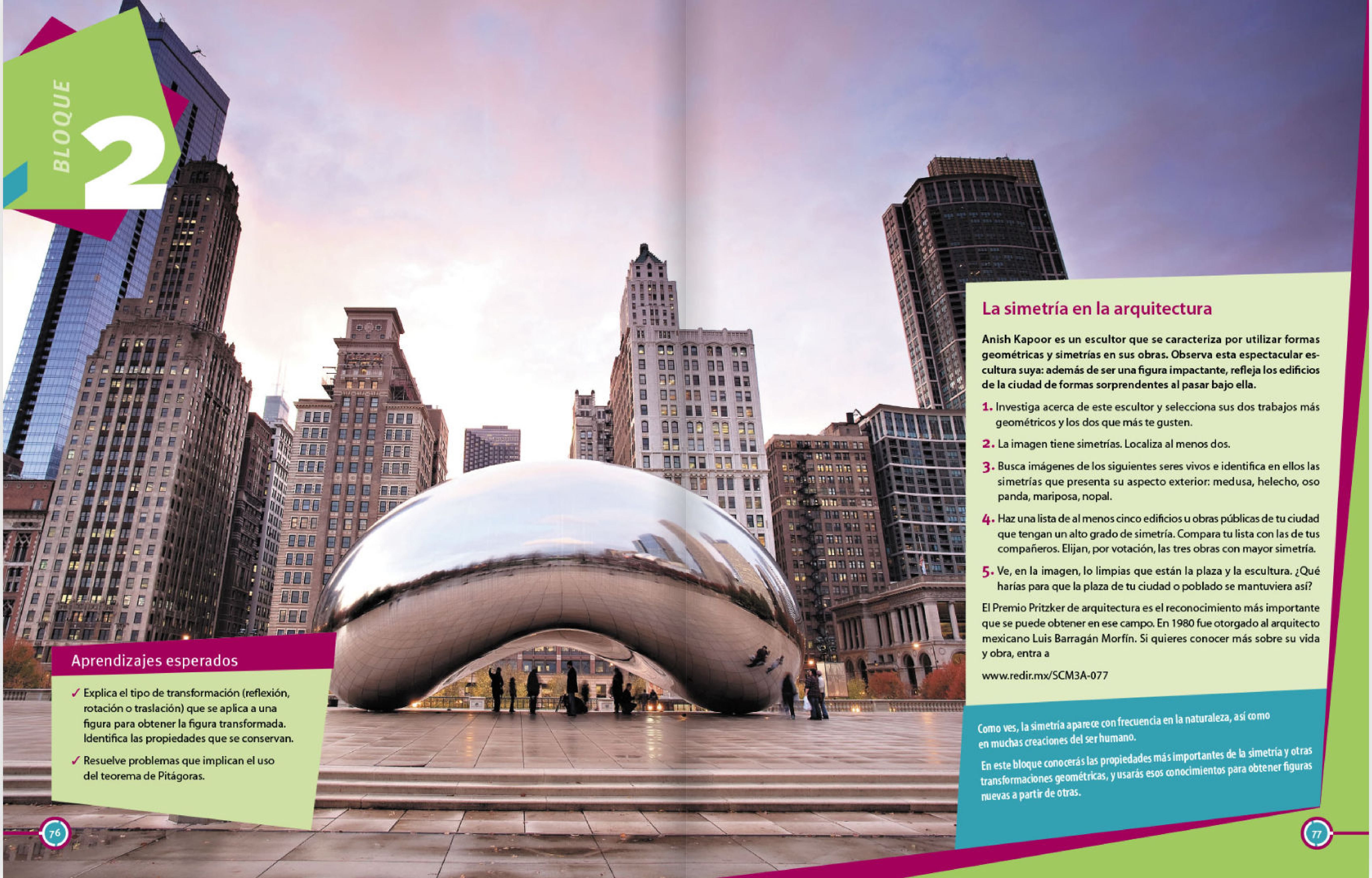
6. Voltea una vez más la figura y verás la siguiente forma.

7. Con ayuda de las aberturas de cada figura, producidas por los dobleces hechos, ensambla las seis unidades, como se muestra.



1. ¿Cómo se llama el cuadrilátero que se obtiene en el paso 6? ______
2. ¿Cuánto miden sus ángulos? ______
3. ¿Qué parte del área del cuadrado inicial es el área de la figura del paso 6? ______
4. ¿Qué parte del área del cuadrado inicial es el área de cada una de las caras del cubo? ______

BLOQUE 2



Aprendizajes esperados

- ✓ Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- ✓ Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

La simetría en la arquitectura

Anish Kapoor es un escultor que se caracteriza por utilizar formas geométricas y simetrías en sus obras. Observa esta espectacular escultura suya: además de ser una figura impactante, refleja los edificios de la ciudad de formas sorprendentes al pasar bajo ella.

1. Investiga acerca de este escultor y selecciona sus dos trabajos más geométricos y los dos que más te gusten.
2. La imagen tiene simetrías. Localiza al menos dos.
3. Busca imágenes de los siguientes seres vivos e identifica en ellos las simetrías que presenta su aspecto exterior: medusa, helecho, oso panda, mariposa, nopal.
4. Haz una lista de al menos cinco edificios u obras públicas de tu ciudad que tengan un alto grado de simetría. Compara tu lista con las de tus compañeros. Elijan, por votación, las tres obras con mayor simetría.
5. Ve, en la imagen, lo limpias que están la plaza y la escultura. ¿Qué harías para que la plaza de tu ciudad o poblado se mantuviera así?

El Premio Pritzker de arquitectura es el reconocimiento más importante que se puede obtener en ese campo. En 1980 fue otorgado al arquitecto mexicano Luis Barragán Morfín. Si quieres conocer más sobre su vida y obra, entra a

www.redir.mx/SCM3A-077

Como ves, la simetría aparece con frecuencia en la naturaleza, así como en muchas creaciones del ser humano.

En este bloque conocerás las propiedades más importantes de la simetría y otras transformaciones geométricas, y usarás esos conocimientos para obtener figuras nuevas a partir de otras.

Secuencia 1 / lección 26

La técnica de factorización I

CONTENIDO
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

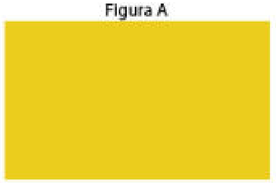
El ensayo y error es un procedimiento útil para resolver algunas ecuaciones de segundo grado; sin embargo, es necesario conocer otros procedimientos para encontrar más rápido la solución. En esta secuencia conocerás uno de ellos.

Una pista

Descompón en factores primos el área (84 cm²) y busca, entre esos factores, las medidas del ancho y el largo.

1. Trabaja en equipo. La figura A es un rectángulo. Usen las medidas indicadas abajo para averiguar cuánto mide cada lado. Verifiquen que el área sea 84 cm² y el perímetro, 38 cm.

Figura A



Perímetro = 38 cm

Área = 84 cm²

Largo = ____________

Ancho = ____________

- Hagan, con ayuda del profesor, lo siguiente.
  a) Revisen los resultados que obtuvieron y determinen cuáles son correctos.
  b) Comenten los procedimientos que usaron para resolver la actividad y mencionen por medio de cuáles consiguieron el resultado correcto.

2. Lee cada paso del razonamiento que aparece en la tabla para encontrar las medidas de los lados de la figura A. Completa la tabla en equipo y respondan las preguntas en su cuaderno.

Razonamiento	Explicar por qué
Paso 1. Si el perímetro del rectángulo mide 38 cm, entonces el largo más el ancho miden 19 cm.	
Paso 2. Si el largo más el ancho miden 19 cm, esas medidas se pueden representar así: ancho = x, largo = $19 - x$.	
Paso 3. Si el ancho mide x y el largo, $19 - x$, el área se puede expresar así: $x(19 - x) = 84$.	
Paso 4. Se pueden encontrar las medidas buscadas mediante un cálculo simple: si $x = 1$, el área vale $1(18) = 18$; si $x = 2$, el área vale $2(17) = 34$.	

a) ¿Cuánto miden, según el razonamiento de la tabla, el ancho y el largo del rectángulo?

b) Expliquen por qué, si representamos el largo de la figura con x, el ancho es $19 - x$.

c) El primer miembro de la ecuación $x(19 - x) = 84$ es el producto de dos factores que, en este caso, representan las medidas de un rectángulo (ancho y largo); el segundo corresponde al resultado de la multiplicación y, en este caso, representa el área del rectángulo. En la siguiente tabla se muestran otras formas de representar la misma ecuación. Complétala.

Ecuación	¿Qué se hizo?
$19x - x^2 = 84$	
$19x - x^2 - 84 = 0$	
$x^2 - 19x + 84 = 0$	

d) ¿Cuánto miden el largo, el ancho y el perímetro de otro rectángulo si se sabe que su área se expresa mediante la ecuación $x(x + 4) = 45$?

Largo: ____________ Ancho: ____________ Perímetro: ____________

3. El área de un rectángulo se expresa mediante la ecuación $x^2 + 8x = 105$.
   a) Rescribe la ecuación como un producto de dos factores igual al área: ____________
   b) De acuerdo con la ecuación que escribiste en el inciso anterior, ¿cómo se relacionan el largo y el ancho del rectángulo? ____________
   c) Resuelve la ecuación y anota las medidas del rectángulo.
   Ancho: ____________ Largo: ____________

- Analiza, con el grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información.

Factorizar significa escribir un número o una expresión algebraica como un producto de dos o más factores. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 8x = 105$, el miembro izquierdo puede factorizarse como $x(x + 8)$, pues al desarrollar ese producto se obtiene como resultado $x^2 + 8x$. La nueva ecuación, $x(x + 8) = 105$, es equivalente a la primera y, por tanto, tiene las mismas soluciones.

4. Factoriza, en equipo y en tu cuaderno, las ecuaciones. Encuentren, por ensayo y error, las soluciones.
   a) $x^2 - 16x + 63 = 0$
   b) $x^2 + 9x + 20 = 0$
   c) $x^2 - 9x + 14 = 0$
   d) $x^2 + 5x - 14 = 0$

- Compara, con ayuda del profesor, tus soluciones con las del grupo y verifiquen que sean correctas.

BLOQUE 2

Secuencia 1 / lección 27

La técnica de factorización II

CONTENIDO
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

1. **Trabaja en equipo. Consideren lo siguiente.**

Javier piensa un número → Lo eleva al cuadrado → Después le suma el doble del número que pensó → Al resultado de la suma le resta 15 → ¡Y obtiene cero!

¿Qué número pensó Javier? ________

- **Comparen su resultado con el de sus compañeros; comenten cómo lo encontraron. Después, con ayuda del profesor, trabajen la siguiente actividad.**

2. Si x representa el número que pensó Javier…

   a) ¿Cómo se expresaría en una ecuación lo que hizo? ________

   b) La ecuación anterior se reescribe en forma factorizada como $(x + 5)(x - 3) = 0$.

   Averigüen cómo, a partir de una, se puede hallar la otra.

3. **Trabaja en equipo. Analicen la siguiente ecuación y respondan.**

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

   a) En la ecuación hay un producto de dos factores que es igual a 0. ¿Qué factores son?

   ____

   b) Los dos factores están formados por un término común y dos términos que no son comunes. ¿Cuál es el término común? ___ ¿Y los no comunes? ________

   c) Aunque no lo parezca, la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$ es una ecuación de segundo grado.

   Averigüen y expliquen por qué. ________

   ____

   d) Si el producto de dos factores es igual a 0, ¿qué dirían de esos factores? Subrayen la respuesta correcta.

   » Que si uno de ellos vale n, el otro vale $-n$.
   » Que si uno de ellos vale n, el otro vale $\frac{1}{n}$.
   » Que al menos uno de ellos vale 0.

   e) A partir de la respuesta anterior, ¿qué deducirían de los factores que integran la expresión

   $(x + 5)(x - 3) = 0$? ________

- Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, las respuestas de la actividad anterior. En particular, comenten cómo justificaron que la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$ es una ecuación de segundo grado.

4. **Considera que en la ecuación de segundo grado $(x + 5)(x - 3) = 0$ sucede que $x + 5 = 0$, o bien, que $x - 3 = 0$.**

   a) Si $x + 5 = 0$, ¿cuál es el valor de x? ______ Si $x - 3 = 0$, ¿cuál es el valor de x? ______

   b) De acuerdo con lo anterior, ¿en qué números pudo pensar Javier? ______

5. **Completa la tabla.**

Forma general	Forma factorizada	Soluciones
$x^2 + 6x + 5 = 0$	$(x + 1)(\quad) = 0$	
$x^2 + 5x + 6 = 0$		
	$(x + 2)(x - 3) = 0$	
	$(x - 2)(x + 3) = 0$	
	$(x - 2)(x - 3) = 0$	
	$(x + s)(x + t) = 0$	$x_1 = -s$

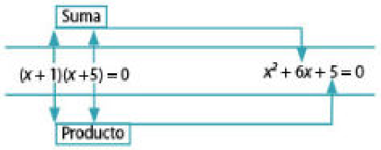
6. **Lleva a cabo, en equipo, lo siguiente.**

   a) Comparen sus respuestas de la actividad anterior.

   b) Verifiquen que la expresión factorizada $(x + s)(x + t) = 0$ corresponda a la forma general $x^2 + (s + t)x + st = 0$.

   c) Adviertan que, en la forma general anterior, el número que multiplica a x es la suma $s + t$, y el tercer término es el producto st.

   d) Verifiquen que ocurra lo mismo con todas las ecuaciones de la tabla anterior. Por ejemplo, en la primera sucede que…



7. **Trabaja con un compañero. Usen el procedimiento anterior para convertir la forma general de cada ecuación de la tabla siguiente en la forma factorizada.**

Forma general	Forma factorizada	Soluciones
$x^2 + 7x + 12 = 0$	$(\quad)(\quad) = 0$	
$x^2 + 8x + 15 = 0$		
$x^2 + 5x + 6 = 0$		
$x^2 + 14x + 45 = 0$		
$x^2 + 4x + 3 = 0$		

- **Comparen sus resultados con los del resto del grupo y corrijan sus errores. Verifiquen que, en todas las formas factorizadas, la suma de ambos números corresponda al coeficiente de x y el producto de ambos números, al término independiente de la ecuación.**

Reflexionamos

¿Cuál es la forma factorizada de $x^2 + 6x = 0$? ¿Cuáles son los números que se buscan? ¿Cuáles son los números que se buscan en la ecuación $x^2 = 0$?

Secuencia 1 / lección 28

La técnica de factorización III

CONTENIDO
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

1. **Haz, en equipo, lo que se indica.**

   a) Inventen dos ecuaciones de segundo grado expresadas como producto de dos factores y anótenlas.

   » Ecuación 1: ____________ Ecuación 2: ____________

   b) Escriban, junto a cada ecuación que inventaron, la misma en la forma general.

   c) Verifiquen que las soluciones de cada caso sean los opuestos de los números de los factores. Por ejemplo, en la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$, las soluciones son $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$.

- **Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Corrijan lo que sea necesario.**

2. Completen la tabla.

Forma general	Forma factorizada	¿Cómo son los números buscados?
$x^2 - x - 2 = 0$	$(\quad)(\quad) = 0$	Sumados dan -1, multiplicados dan -2.
$x^2 + 7x + 10 = 0$		Sumados dan ____, multiplicados dan ____.
$x^2 + x - 12 = 0$		Sumados dan ____, multiplicados dan ____.
$x^2 + 2x - 3 = 0$		Sumados dan 2, multiplicados dan -3.
$x^2 - 7x + 12 = 0$		Sumados dan ____, multiplicados dan ____.

Convivimos

Elabora un formulario propio con técnicas para factorizar. Compáralo con el de algunos compañeros y complementen lo necesario. Expliquen, con sus palabras, en qué consiste cada técnica y cómo ayuda a resolver ecuaciones de segundo grado.

3. Trabajen en su cuaderno. Factoricen cada ecuación y encuentren sus raíces (soluciones).

   a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
   b) $x^2 - 2x + 1 = 0$
   c) $x^2 - x - 12 = 0$
   d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

- Con ayuda del profesor, comparen sus respuestas a las actividades 2 y 3 con las del grupo. Si algunas no coinciden, detecten errores y corrijan lo necesario. Al finalizar, de manera grupal redacten un método para factorizar ecuaciones como las anteriores (del tipo $x^2 + Bx + C = 0$)

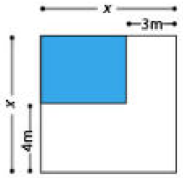
Reflexionamos

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$? ¿Y las de la ecuación $x^2 + 0.3x + 0.2 = 0$?

4. **Resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.**

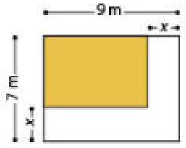
   a) El dibujo representa el piso de una sala de espera cuadrada. El área cubierta por el tapete azul es de 6 m².

   ¿Cuánto mide el lado de la sala de espera? ____________



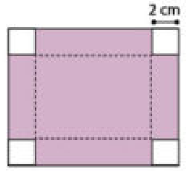
   b) Liliana colocará 35 m² de mosaico en el piso de su patio que mide 9 m × 7 m. Como el mosaico no alcanza para cubrir todo el piso, dejará un pasillo de ancho uniforme, como muestra la figura.

   ¿Cuál será el ancho del pasillo? ____________



   c) En cada esquina de una pieza rectangular que mide 7 cm más de largo que de ancho, se cortó un cuadrado de 2 cm de lado para armar una caja sin tapa.

   Si el volumen de la caja es 120 cm³, ¿cuáles son sus medidas? ____________



5. **Consideren la ecuación $4x^2 - 12x + 9 = 0$, en la que el coeficiente de x^2 no es 1. Analicen, a partir de las preguntas planteadas, si es posible resolverla mediante factorización. Escriban las respuestas en su cuaderno.**

   a) Si a partir de la ecuación $4x^2 - 12x + 9 = 0$ se obtuvo la ecuación $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$, ¿qué fue lo que se hizo?

   b) Para resolver la ecuación se requieren dos números que sumados den -3 y multiplicados, $\frac{9}{4}$. ¿Cuáles son esos números?

   c) Factoricen la ecuación $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$.

   d) ¿Cuáles son entonces las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$?

   e) Verifiquen que las soluciones también satisfagan la ecuación original ($4x^2 - 12x + 9 = 0$).

6. **Usen el procedimiento anterior para resolver las siguientes ecuaciones en su cuaderno.**

   a) $4t^2 + 9t + 5 = 0$
   b) $8m^2 + 18m + 9 = 0$
   c) $6n^2 - 13n + 6 = 0$
   d) $15x^2 + 4x - 3 = 0$

- Con ayuda del profesor, analicen sus respuestas a las actividades 4, 5 y 6 y corrijan lo necesario. En el caso de los problemas analicen si tienen una o dos respuestas y por qué. Después lean la información y compárenla con el método que usaron.

conect@mos

Practica la factorización de ecuaciones en

www.redir.mx/SCM3A-083

Escribe en los recuadros los datos solicitados y haz clic en el botón correspondiente para verificar tus respuestas. Al terminar, comenta con un compañero qué dificultades tuviste al resolver la actividad.

Cuando en una ecuación de segundo grado el coeficiente del término cuadrático (x^2) es un número distinto de 1, es posible dividir todos los términos de la ecuación entre ese coeficiente y buscar una factorización para la nueva ecuación (que es equivalente a la original y, por tanto, tiene las mismas soluciones).

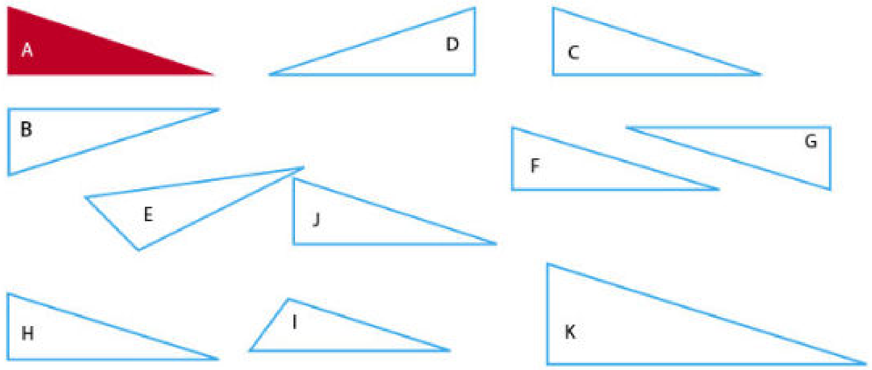
Trasladar figuras

CONTENIDO: Analizo las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

La traslación y la rotación de una figura son transformaciones en el plano que se estudian desde el punto de vista matemático. ¿Qué características tienen? Esto es lo que estudiarás en esta secuencia.

1. La traslación de una figura se consigue moviéndola sobre el plano en una dirección.

a) Imagina que trasladas el triángulo rojo, es decir, que lo deslizas en una dirección, sin girarlo ni levantarlo del papel, y lo dejas en otro lugar.



b) Marca con una ✔ los triángulos que podrían ser el triángulo rojo que trasladaste, y con un ✘ aquellos que no. Puedes dibujar y recortar un triángulo similar al rojo y simular los deslizamientos.

2. El triángulo A'B'C' es producto de una traslación del triángulo ABC.

a) Traza los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.

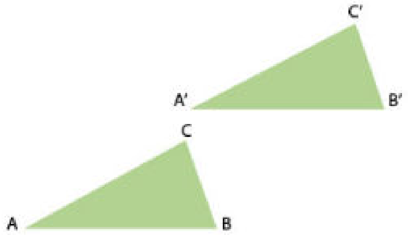
b) Subraya las afirmaciones que sean verdaderas respecto a los segmentos que trazaste.

» Son perpendiculares entre sí.

» Son paralelos entre sí.

» Los tres tienen la misma medida.

» Tienen diferente medida.



3. Trabaja en equipo. Sugieran, entre todos, un método para efectuar traslaciones de una figura geométrica usando regla y compás. Prueben el método propuesto haciendo algunas traslaciones.

* Comenten, con el resto del grupo, el método que propusieron para efectuar traslaciones. Al finalizar, hagan lo siguiente.

a) Acuerden, entre todos, un método común para trasladar una figura geométrica; escriban en su cuaderno las instrucciones.

b) Tracen, en su cuaderno, tres figuras geométricas distintas; prueben las instrucciones que escribieron trazando la traslación de cada una. Háganlo de manera que los segmentos que unen vértices correspondientes midan 5 cm.

Reflexionamos

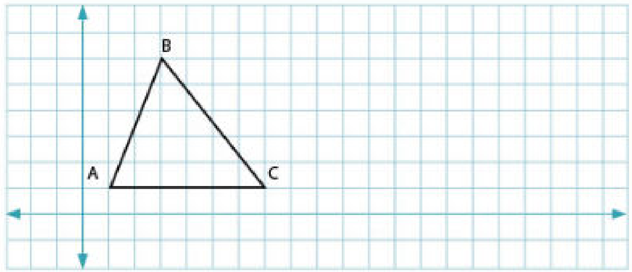
Al trasladar una figura, ¿cambia su forma?, ¿cambia su tamaño? Si trasladas una figura con lados paralelos y perpendiculares, ¿los mantiene? Si trasladas una figura con un ángulo de 60°, ¿lo conserva?

4. En el siguiente plano cartesiano se trasladará el triángulo ABC de manera que el vértice A' quede en las coordenadas (10, 3).

a) ¿Cuáles serán las coordenadas de B'? __________

b) ¿Y las de C'? __________

c) Traza el triángulo que resulta de la traslación.



* Compara tus resultados con los del resto del grupo. Respondan las preguntas en su cuaderno y coméntenlas.

a) Si la figura A' es una traslación de la A, ¿es posible que A' sea de mayor tamaño que A? ¿Podría tener una forma distinta?

b) Si se traslada una figura con lados paralelos, ¿se mantienen así en la figura trasladada? ¿Y si los lados son perpendiculares?

c) Si se traslada una figura con un ángulo de 60º, ¿se conserva el mismo en la figura trasladada?

d) Escriban, de manera grupal, el significado de *traslación* y resuman las propiedades que conserva una figura trasladada.

Reflexionamos

Compara las abscisas (x) del punto A con el A', del B con el B' y del C con el C'. ¿Tienen algo en común? ¿Qué sucede con las ordenadas (y)?

En matemáticas se dice que una figura es una traslación de otra si los segmentos que unen los puntos correspondientes de las dos figuras tienen la misma medida y son paralelos entre sí. La medida de cada segmento es llamada **magnitud de la traslación**.

BLOQUE 2

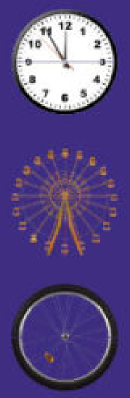
Secuencia 2 / lección 30

Rotar figuras

CONTENIDO: Analizo las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

En contexto

La idea de rotación se presenta en diversas situaciones cotidianas; por ejemplo, los siguientes objetos rotan: el minutero de un reloj, las canastillas de la rueda de la fortuna y la rueda de una bicicleta.



1. Haz lo que se indica.

a) Recorta, en papel transparente, un círculo del mismo tamaño que el de abajo.

b) Colócalo sobre esta hoja de manera que su centro coincida con el punto C.

c) Sujétalo de manera que gire en torno a su centro (usando, por ejemplo, la punta de un lápiz o de un alfiler).

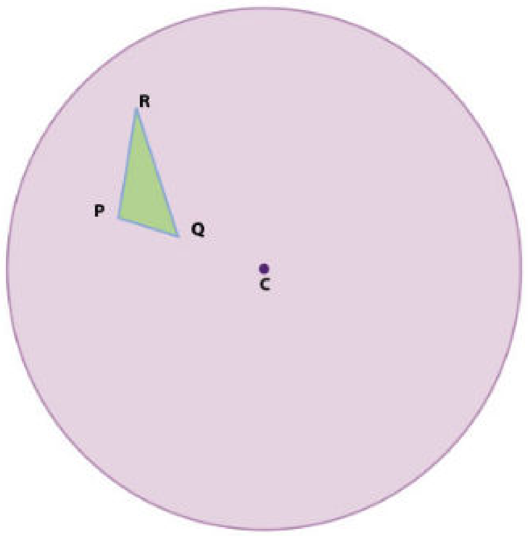
d) Calca en el círculo el triángulo PQR.

e) Gira el círculo, en el ángulo que desees, y remarca el triángulo en el lugar donde haya quedado para que se marque en la hoja del libro.

f) Quita el círculo y marca con lápiz el nuevo triángulo: has rotado el triángulo PQR. Anota P′, Q′ y R′ en los vértices respectivos.

g) Une el punto C con los puntos P y P′. Mide el ángulo PCP′ y anota su medida.

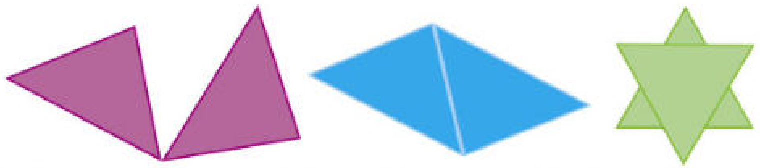
h) Haz dos o tres rotaciones más del triángulo.



El ángulo que giraste para rotar el triángulo se llama **ángulo de rotación** y el punto C se denomina **centro de rotación**.
El centro de rotación puede estar fuera de la figura, ser uno de sus vértices o estar sobre alguno de sus lados o, incluso, dentro de la figura.

- Haz, con el grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.
  a) Tracen en su cuaderno un triángulo cualquiera MNP.
  b) Ubiquen un punto C fuera del triángulo. Este punto será el centro de rotación.
  c) Tracen otro triángulo que sea una rotación del MNP respecto al punto C; háganlo con un ángulo de rotación de 60°.

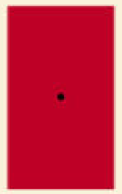
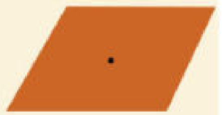
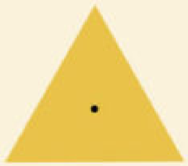
2. Encuentra el centro de rotación que transforma un triángulo en otro. Si es necesario, recorta figuras similares a las de abajo para que puedas manipularlas.



Una pista

Copia las figuras y recórtalas. Usa tu lápiz para fijar un centro de rotación en la figura y comprobar si, al rotarla, se obtiene la otra.

3. Considera que el punto marcado dentro de las figuras de la siguiente tabla es su centro de rotación, y que cada una girará según el ángulo indicado. Dibuja en la tercera fila cómo quedarán éstas después de girarlas.

Figura inicial			
Ángulo de rotación	90°	180°	180°
Figura final			

Reflexionamos

¿Qué figuras geométricas, al rotarlas 180° respecto a su centro, quedan en la misma posición?

4. En la siguiente tabla hay algunas preguntas referidas a ciertas características de la rotación y la traslación de figuras. Anota Sí o No, según corresponda.

	Rotación	Traslación
¿Se conservan las medidas de los ángulos de la figura?		
¿Se conservan las medidas de los lados de la figura?		
¿Se conserva la forma de la figura?		

- Compara tus resultados de las actividades 2, 3 y 4 con los de tus compañeros. Después redacten en su cuaderno un resumen sobre la traslación y la rotación; ilústrenlo con una figura a la que le apliquen una traslación y una rotación.

BLOQUE 2

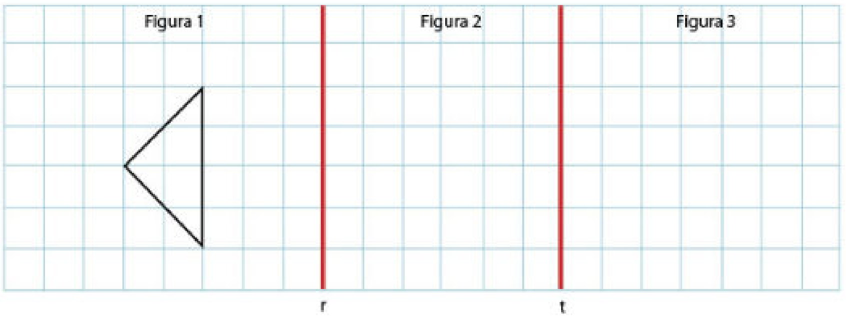
Secuencia 3 / lección 31

Transformaciones equivalentes

CONTENIDO
Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

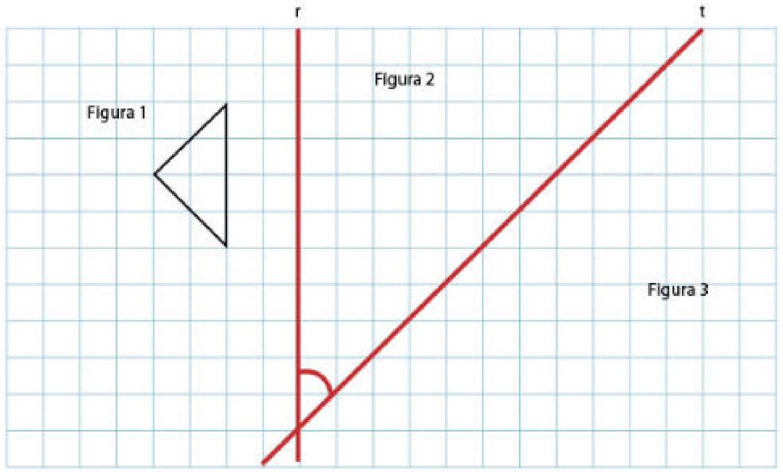
Ya has estudiado tres transformaciones en el plano: simetría respecto a un eje, traslación y rotación. ¿Puedes identificarlas en logotipos de empresas, mosaicos, azulejos o pinturas? En esta secuencia notarás que estas transformaciones tienen muchos usos en la vida real.

1. **Traza la figura 2 simétrica a la figura 1 respecto a la recta r. Después traza la figura 3 simétrica a la figura 2 respecto a la recta t. Advierte que las rectas r y t son paralelas. Después responde en tu cuaderno.**



a) ¿Qué transformación (rotación, traslación o simetría) permite obtener directamente la figura 3 a partir de la 1?
b) Considera los lados de cada cuadrito como unidades de medida. ¿Qué distancia hay entre un vértice de la figura 1 y su correspondiente en la 3?
c) ¿Qué distancia hay entre las paralelas r y t?
d) ¿Cómo se relaciona la distancia entre r y t con la distancia entre un vértice de la figura 1 y su correspondiente en la 3?

2. **Traza la figura 2 simétrica a la 1 respecto a la recta r, y la figura 3 simétrica a la 2 respecto a la recta t. Luego responde en tu cuaderno.**



conect@mos

Practica la rotación y traslación de figuras en

www.redir.mx/SCM3A-088

Haz la actividad propuesta. Al finalizar, reúnete con un compañero; comparen y validen sus respuestas, y comenten qué dificultades encontraron.

sm

sm

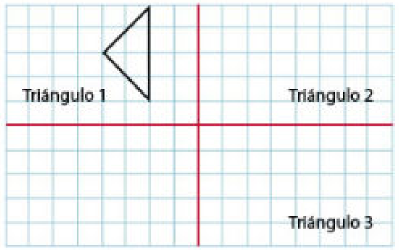
a) Ten en cuenta que la figura 3 corresponde a una rotación de la 1. Encuentra el centro de rotación y márcalo; anota al lado de éste cuánto mide el ángulo de rotación.
b) ¿Cuánto mide el ángulo (marcado con rojo) entre las dos rectas?
c) ¿Cómo se relacionan el ángulo de rotación y el ángulo entre las rectas?

* Revisa, con el grupo, tus respuestas. Redacten, entre todos y con ayuda del profesor, un resumen titulado "Transformaciones equivalentes", que incluya las respuestas de las siguientes preguntas.
  » ¿Qué transformación equivale a reflejar una figura dos veces respecto a dos rectas paralelas?
  » ¿Qué transformación equivale a reflejar una figura dos veces respecto a dos rectas que se cortan?
  » ¿Cuánto mide el ángulo de rotación si las dos rectas son perpendiculares?
  » ¿En qué situación las rectas se cortan, pero no son perpendiculares?

3. **Traza el simétrico del triángulo 1 respecto al eje vertical para obtener el triángulo 2, y el simétrico del triángulo 2 respecto al eje horizontal para obtener el triángulo 3. Responde en tu cuaderno.**

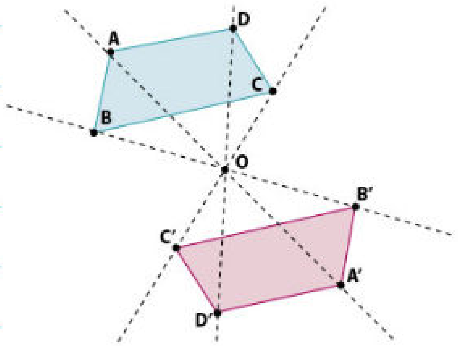
Considera que el triángulo 3 es una rotación del 1.

a) ¿Cuál es el centro de rotación?
b) ¿Cuánto mide el ángulo de rotación?
c) ¿Cuánto mide el ángulo entre las rectas?



La rotación de 180° también se denomina **simetría central**. En este caso, el centro de rotación se llama **centro de simetría** y se dice que las figuras son simétricas respecto a este punto.

4. **El cuadrilátero rojo es simétrico al azul respecto al punto O. Explica, en equipo, cómo se hizo el trazo. Después, reprodúzcanlo en su cuaderno.**



* **Con ayuda del profesor compara tus respuestas a las actividades 3 y 4 con las del grupo. Al finalizar busquen en el entorno figuras con simetría respecto a un punto.**

Una pista

Considera que el ángulo de rotación tiene su vértice en el centro de rotación; uno de sus lados pasa por el vértice de la figura 1 y el otro, por el correspondiente en la 3.

conect@mos

Descarga la actividad de rotación y traslación de figuras en

www.redir.mx/SCM3A-089

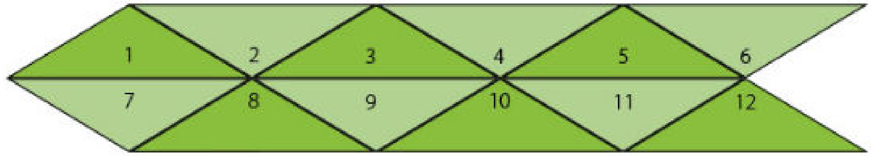
Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídenlas.

Figuras en movimiento

CONTENIDO
Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

1. Elabora en cartulina 12 triángulos isósceles como el siguiente. Los ángulos iguales miden 30º y el lado mayor, 5 cm. Reproduce los diseños que se muestran y contesta las preguntas.

a) En la flecha…



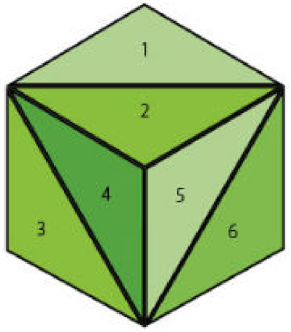
» ¿Qué triángulo es simétrico al 5 respecto al eje horizontal? __________

» ¿Qué triángulos son traslaciones del 10? __________

b) En el hexágono…

» Encuentra dos triángulos que se obtengan al aplicar una simetría al triángulo 3. __________

» Halla dos triángulos que se obtengan al aplicar una rotación al triángulo 1. __________



c) En la estrella…

» ¿Qué transformaciones se aplicaron al triángulo 1 para formarla?

____

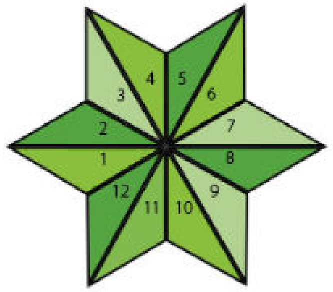
____

» ¿Qué transformaciones harías para obtener el triángulo 7 a partir del 2? __________

» ¿Qué transformaciones harías para obtener el triángulo 7 a partir del 4? __________

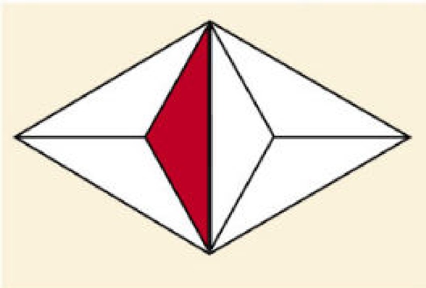
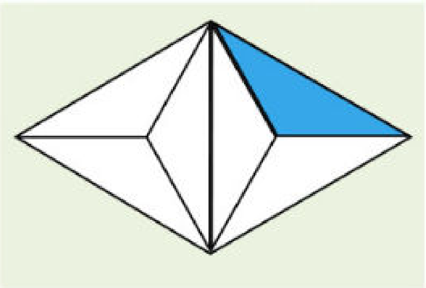
Reflexionamos

Los triángulos 2 y 9 en el inciso a) pueden obtenerse a partir de una rotación del triángulo 1. Para cada caso, ¿cuál es el centro de rotación?, ¿cuál es el ángulo de rotación?



* Compara tus respuestas con las del resto del grupo. Para cada transformación que hayan encontrado, especifiquen, según sea el caso, su eje (simetría axial), su centro y ángulo (rotación) o su magnitud (traslación).

2. Colorea lo que se indica.

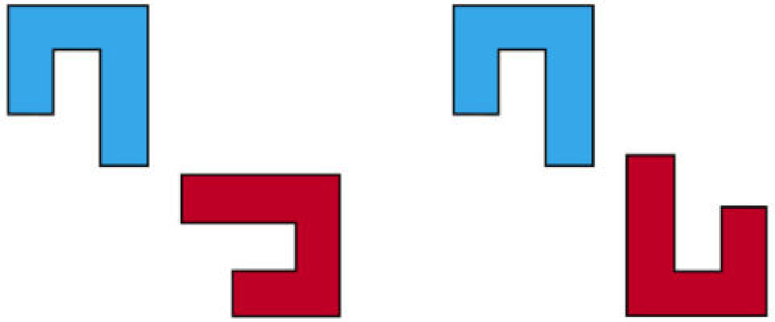
Dos triángulos que se obtienen al aplicar una simetría al triángulo rojo.	Dos triángulos que se obtienen al aplicar una rotación al triángulo azul.
	

3. Reproduce los siguientes diseños usando como molde los triángulos de cartulina que hiciste y dibújalos en tu cuaderno.

a) Un diseño en el que haya seis traslaciones de un mismo triángulo
b) Un diseño en el que haya tres rotaciones de un mismo triángulo
c) Un diseño en el que haya dos triángulos simétricos respecto a un eje
d) Un diseño con cualquier número de triángulos en que utilices simetrías, rotaciones y traslaciones en conjunto

* Muestra a tus compañeros tus diseños. Expliquen, en cada caso, las simetrías, rotaciones y traslaciones que aplicaron.

4. Traza, en tu cuaderno y para cada caso, una figura como la azul y aplica las transformaciones necesarias para obtener la figura roja. Utiliza tu juego de geometría, y no olvides describir los pasos de cada construcción.



conect@mos

Sigue practicando la rotación y traslación de figuras en

www.redir.mx/SCM3A-091

Trabaja con un compañero. Lean la información que se presenta y resuelvan los ejercicios. Al finalizar, comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las del grupo y valídenlas.

* Compara tus figuras con las de otros compañeros. Comenten, en equipos, las transformaciones que hicieron, especificando las características de cada una (ejes de simetría, centro y ángulo de rotación, magnitud de la traslación) y también si alguna de las figuras puede obtenerse de diferentes maneras , es decir, con transformaciones distintas.

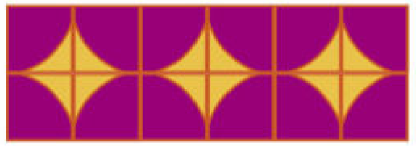
BLOQUE 2

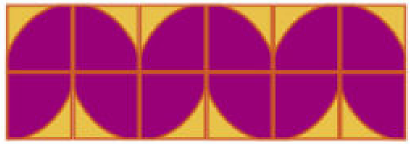
Secuencia 3 / lección 33

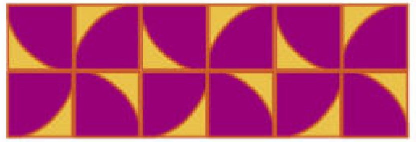
Diseños con transformaciones

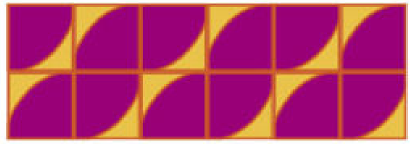
CONTENIDO: Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

1. Considera la siguiente figura base: Escribe, en cada caso, si para formar el diseño se aplicó a la figura base una traslación, una rotación o una simetría. Ten en cuenta que, en cada ejemplo, pudo haberse aplicado más de una transformación.









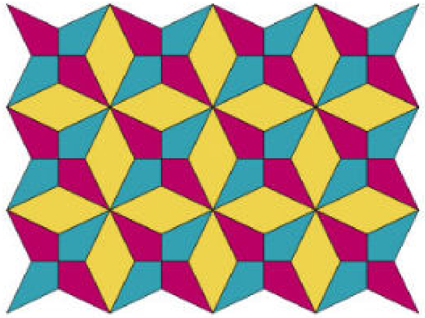
En contexto

Las transformaciones geométricas son ampliamente usadas en elementos arquitectónicos, por ejemplo, al recubrir pisos con mosaicos.

2. Traza en una hoja de papel ocho figuras base similares a la anterior. El cuadrado debe medir 2 cm de lado. Recórtalas, inventa un diseño y pégalo en el siguiente espacio. Anota las transformaciones que hayas aplicado.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Entre todos, elijan alguna de las explicaciones que escribieron en la actividad anterior y comprueben que hayan empleado de manera correcta el lenguaje geométrico al describir las transformaciones hechas. Si es necesario, hagan a su texto las modificaciones que consideren pertinentes.

3. Analiza el siguiente diseño. Describe cómo puede construirse.



Una pista

Identifica la figura base y describe las transformaciones hechas.

4. Traza en tu cuaderno un triángulo equilátero de 3 cm de lado. Dibuja dentro de él algunos motivos, de creación propia o inspirados en un logotipo, y coloréalo a tu gusto. Reprodúcelo 12 veces. Elabora otro diseño usando solamente transformaciones geométricas y pégalo en tu cuaderno.

5. Considera los siguientes logotipos.

En contexto

Los mosaicos árabes de la Alhambra, en Granada (España), son una muestra del arte que se consigue al aplicar traslaciones, rotaciones y simetrías.

- Responde, en grupo, en cuáles de estos logotipos hay simetrías, traslaciones o rotaciones. Identifiquen, en el caso de las simetrías axiales o centrales, el eje o centro de simetría, y en las rotaciones, el centro y el ángulo de rotación.

6. Diseña, para tu escuela, un logotipo en que apliques una o más transformaciones geométricas.

- Organiza, junto con el grupo, una exposición de logotipos en tu escuela. Elijan el que más les guste.

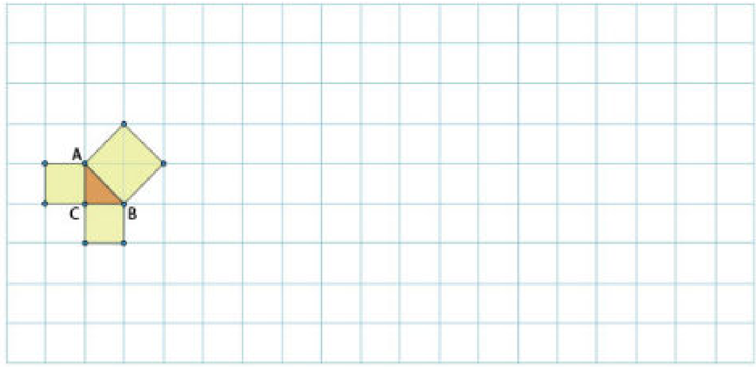
Secuencia 4 / lección 34

Teorema de Pitágoras

CONTENIDO Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

El triángulo rectángulo es una figura muy importante pues se relaciona directamente con el teorema de Pitágoras. Te preguntarás qué es un teorema, quién fue Pitágoras, o en qué consiste el teorema de Pitágoras. Al estudiar esta secuencia, resolverás éstas y otras preguntas.

1. **Considera el lado de un cuadrito como la unidad de longitud y la superficie de un cuadrito como la unidad de área. Haz lo que se indica y responde en tu cuaderno.**

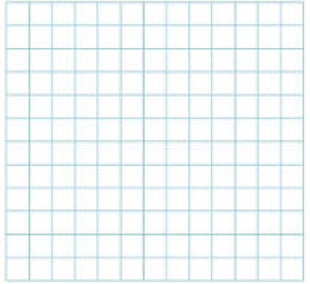


a) Escribe letras minúsculas en los lados que forman el triángulo rectángulo. A cada lado le corresponde la letra del vértice opuesto.
b) Verifica que los lados que forman el ángulo recto sean *a* y *b*. Éstos se llaman *catetos*. El lado *c* es la *hipotenusa*.
c) Suma las áreas de los cuadrados cuyo lado fue trazado en los catetos y compara el resultado con el área del cuadrado cuyo lado fue trazado sobre la hipotenusa. ¿Qué relación tienen las áreas?
d) Traza en la cuadrícula superior, a la derecha de la figura anterior, una figura semejante, pero con un triángulo rectángulo más grande. Averigua los siguientes datos.

» Área del cuadrado trazado a partir de un cateto: ___________

» Área del cuadrado trazado a partir del otro cateto: ___________

» Área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa: ___________



2. **Dibuja en la cuadrícula derecha un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 unidades, y otro cuyos catetos midan 3 unidades. Calcula en cada uno el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa, y verifica que ésta sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos.**

conect@mos

Descarga la actividad de triángulos y cuadrados en

www.redir.mx/SCM3A-094

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y contesten las preguntas. Al finalizar, comenten, con el resto del grupo, cuándo el área mayor es más pequeña que la suma de las áreas menores, y cuándo sucede lo contrario.

3. **La figura que se muestra a continuación es un triángulo rectángulo. Advierte que sus tres lados miden una cantidad entera de unidades. Analízala y haz lo que se indica.**

a) Anota las longitudes de los lados del triángulo rectángulo y las áreas de los cuadrados trazados en cada lado.

Cateto a = ________

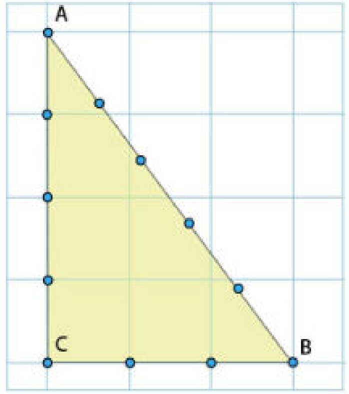
Cateto b = ________

Hipotenusa c = ________

a^2 = ________

b^2 = ________

c^2 = ________



b) Completa las expresiones.

Área del cuadrado construido sobre el cateto a más área del cuadrado construido sobre el cateto b = ___________

Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa menos área del cuadrado construido sobre el cateto a = ___________

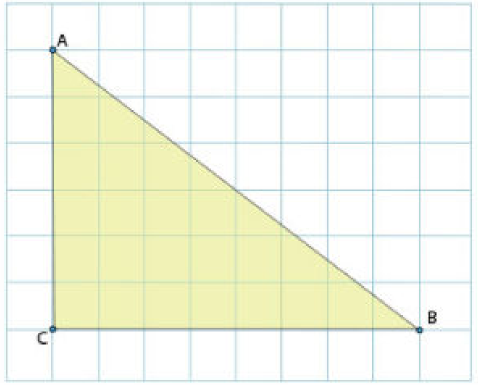
Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa menos área del cuadrado construido sobre el cateto b = ___________

En contexto

En los triángulos pitagóricos, las medidas de los tres lados son números naturales, tales que $a^2 + b^2 = c^2$. El triángulo pitagórico que se muestra a la izquierda se conoce como triángulo sagrado egipcio, y sirvió de base para construir la pirámide de Kefrén, 2600 años a. C.

4. **El siguiente triángulo rectángulo también es pitagórico. Haz en tu cuaderno lo que se indica.**

a) Calcula el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa.
b) Calcula la medida de la hipotenusa.
c) Verifica que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos.



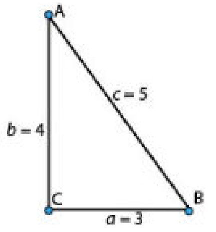
- **Compara tus resultados con los de tus compañeros. Averigüen si la relación anterior también se cumple para un triángulo rectángulo cuyos lados miden 21 cm, 28 cm y 35 cm. Discutan si, dados tres números que cumplan la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$, se puede afirmar que cualquier triángulo cuyos lados midan *a*, *b* y *c* es un triángulo rectángulo.**

Mostrar o demostrar

CONTENIDO
Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

1. Analiza el triángulo rectángulo. Haz lo que se indica y responde en tu cuaderno.

a) Verifica que $c^2 = a^2 + b^2$.
b) Si c^2 fuera mayor que $a^2 + b^2$, ¿qué tipo de ángulo sería C? ¿Qué tipo de triángulo sería ABC y por qué?
c) Si c^2 fuera menor que $a^2 + b^2$, ¿qué tipo de triángulo sería? ¿Por qué?
d) Explica con tus palabras el significado de la relación $a^2 + b^2 = c^2$.



- **Comenta, con el grupo y con ayuda del profesor, el significado que escribiste en el inciso d). Acuerden, entre todos, una redacción común y anótenla.**

2. Las medidas entreras de los lados de un triángulo rectángulo (3, 4 y 5, en el ejemplo anterior) se conocen como *terna pitagórica*, pues son medidas que satisfacen el teorema de Pitágoras, es decir, el cuadrado de la medida mayor es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos. Analiza, en equipo, las siguientes ternas y, sin trazar los triángulos, anota P en las que sean pitagóricas; O en las que correspondan a un triángulo obtusángulo; y A en las que pertenezcan a un triángulo acutángulo. Comprueben sus respuestas trazando los triángulos en su cuaderno.

a) 5, 12, 13 ________ b) 6, 7, 8 ________ c) 5, 8, 11 ________

d) 16, 30, 34 ________ e) 13, 15, 23 ________ f) 24, 7, 25 ________

- **Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Luego contesten lo siguiente.**

a) ¿Cómo saben si una terna es pitagórica? ________

b) ¿Cómo saben si una terna corresponde a un triángulo obtusángulo? ________

c) ¿Cómo saben si una terna corresponde a un triángulo acutángulo? ________

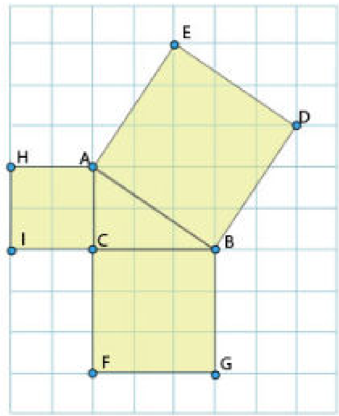
3. Analiza la figura y contesta o haz lo que se indica.

a) ¿Cuánto suman las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos?

____

b) Busca una manera de demostrar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa equivale a la suma del inciso anterior. Explica tu propuesta.

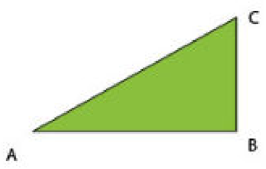
____



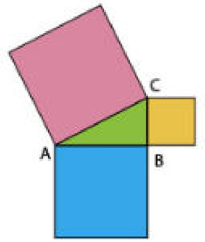
Una pista
Para calcular el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa puedes encerrarlo en una figura más grande, de la cual sea fácil calcular el área y restar lo que sobre.

4. Una manera de demostrar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos es la siguiente. Haz, en equipo, lo que se indica.

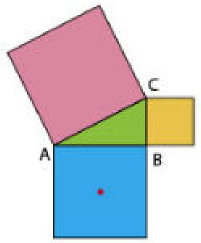
1. Dibujen un triángulo rectángulo como el siguiente, y nómbrenlo ABC.



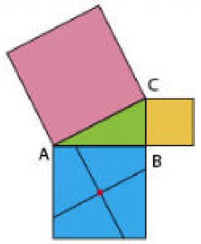
2. Tracen un cuadrado en cada lado del triángulo rectángulo.



3. Localicen el centro del cuadrado trazado a partir del lado $\overline{AB}$.



4. Tracen una paralela y una perpendicular a la hipotenusa que crucen por el centro del cuadrado trazado a partir de $\overline{AB}$.



5. Recorten las cuatro piezas del cuadrado trazado a partir de $\overline{AB}$.
6. Con esas piezas y el cuadrado trazado a partir de $\overline{BC}$, cubran el cuadrado trazado sobre la hipotenusa.

- **Comprueben, en grupo y con ayuda del profesor, si todos pudieron cubrir el cuadrado trazado sobre la hipotenusa. Si alguien no pudo, averigüen a qué se debió. Comparen sus procedimientos y resultados.**

conect@mos
Aprende más acerca del teorema de Pitágoras en

www.redir.mx/SCM3A-097

Lee la información y los ejemplos que se presentan. Si tienes dudas, revisa los conceptos y las técnicas expuestas durante esta secuencia.

BLOQUE 2

Secuencia 5 / lección 36

Dos lados conocidos y uno desconocido

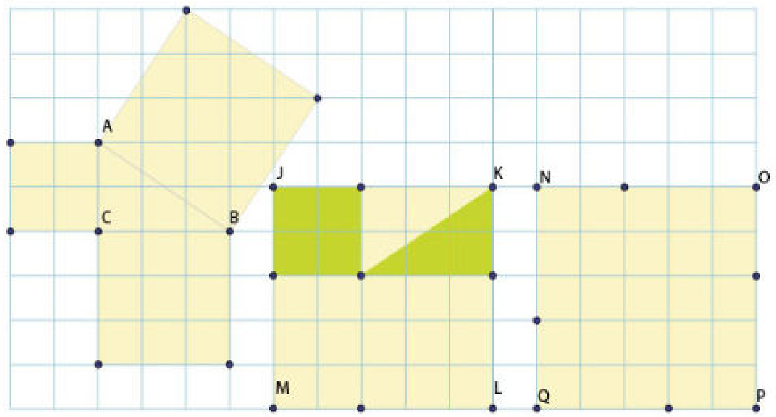
CONTENIDO
Explícito y uso el teorema de Pitágoras

¿Cómo averiguar el área de un triángulo equilátero si sólo se conoce la medida de un lado? ¿De qué manera se anticipa la altura a la que llegará una escalera recargada en la pared? Estos son ejemplos de problemas que resolverás si sabes utilizar el teorema de Pitágoras.

En contexto

Una demostración matemática es un razonamiento basado en ideas que se dan por ciertas, o en teoremas demostrados.

1. La siguiente construcción es una demostración gráfica del teorema de Pitágoras, cuyo diseño se atribuye a él mismo. Analízala y haz lo que se indica para que entiendas en qué consiste. Ten en cuenta que los cuadrados **JKLM** y **NOPQ** son congruentes.



a) En el cuadrado **JKLM** une los puntos para obtener cuatro triángulos congruentes al **ABC** y dos cuadrados del mismo tamaño que los construidos sobre los catetos. En la figura ya se trazaron un triángulo y el cuadrado del cateto menor.

b) Une los puntos en el cuadrado **NOPQ** para obtener cuatro triángulos congruentes con el triángulo **ABC**, y un cuadrado del mismo tamaño que el trazado sobre su hipotenusa.

c) Completa los siguientes enunciados. Considera el ejemplo.

» El área del cuadrado **JKLM** es la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ más cuatro triángulos congruentes con el **ABC**.

» El área del cuadrado **NOPQ** es la suma del área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ más ________________________

» Por tanto, el área total de los cuadrados construidos a partir de los catetos es ________ ________________________

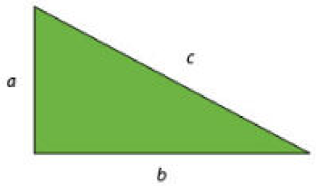
Convivimos

¿Cómo afrontas una situación nueva para ti? Aquella que adoptas, ¿es la mejor actitud? Coméntalo con tus compañeros. Un problema matemático también es una situación novedosa; atrévete a encontrar con tus recursos la manera de solucionarlo. Ten confianza en lo que conoces, usa dibujos, diagramas, calculadora, etcétera.

* Analiza, con el grupo y con ayuda del profesor, los enunciados que escribiste. Acuerden una redacción común.

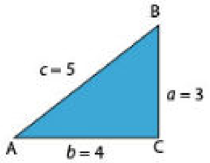
Lo que hicieron en la actividad anterior es una manera de demostrar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados a partir de los catetos. Esta propiedad se llama **teorema de Pitágoras**, y algebraicamente se escribe $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Trabaja en equipo. Consideren que, en un triángulo rectángulo, un cateto mide a; otro, b; y la hipotenusa, c; como se muestra en el triángulo verde. La relación entre las áreas de los cuadrados que se trazan en los lados se puede expresar de tres maneras. Escríbanlas.



$c^2 =$ ________ $a^2 =$ ________ $b^2 =$ ________

3. **Hagan, con base en el triángulo ABC (azul), lo siguiente.**



a) Verifiquen cuáles de las siguientes relaciones se cumplen, sustituyendo en cada igualdad el valor de a, b y c. Tachen la que no se cumpla.

$a^2 + b^2 = c^2$ $c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$ $b^2 = c^2 - a^2$

b) Contesten las preguntas.

» $\sqrt{5^2} =$ _____ $\sqrt{20^2} =$ _____ $\sqrt{134^2} =$ _____ $\sqrt{84^2} =$ _____

» ¿Por qué, para números positivos, elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada son operaciones inversas? Contesten en su cuaderno.

» ¿Qué otras operaciones inversas conocen? ________________________

c) Completen las siguientes relaciones con base en sus respuestas anteriores.

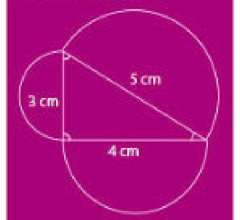
» Si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ y $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

» Si $a^2 = c^2 - b^2$, entonces $a =$ ________________________

» Si $b^2 = c^2 - a^2$, entonces $b =$ ________________________

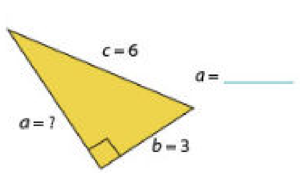
Reflexionamos

¿Consideras que el teorema de Pitágoras se cumple si se trazan semicírculos en lugar de cuadrados?

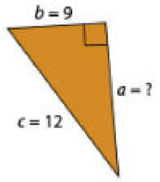


¿Cómo lo demostrarías?

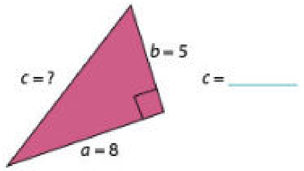
4. **Calculen la medida faltante de cada triángulo rectángulo.**



$a =$ ______



$a =$ ______



$c =$ ______

Problemas diversos

CONTENIDO

Explícito y uso el teorema de Pitágoras

1. **Resuelve, en equipo, los siguientes problemas. Pueden usar calculadora cuando sea necesario, así como trazar las figuras relacionadas con cada inciso.**

   a) Primer problema
   Caminé hacia el norte 5 km y luego hacia el este 3 km. ¿A qué distancia estoy del punto de partida?

   b) Segundo problema
   Una escalera de 5 m de largo se apoya sobre el piso a 1.5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza ésta respecto al piso?

   c) Tercer problema
   Quiero cubrir un piso cuadrado, que mide 4 m de lado, usando losetas hexagonales. Cada una mide 10 cm de lado. Si éstas se venden en cajas de 38 piezas, ¿cuántas cajas debo comprar para que me sobre la menor cantidad de losetas posible?

   d) Cuarto problema
   ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm, y cuya base mide 2 cm menos que la altura?

2. **Contesta, en equipo y con base en la actividad anterior, lo siguiente.**

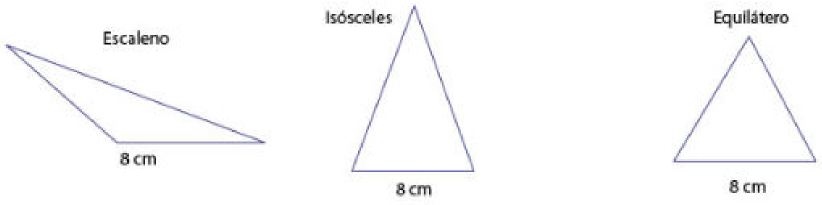
   a) De acuerdo con los datos que se exponen en el segundo problema, ¿es posible que la altura que alcanza la escalera estando recargada en la pared sea mayor que la de la escalera en posición vertical? ______ ¿Por qué? ______________________

   b) Si, en el primer problema, la caminata fuera hacia el norte y luego hacia el oeste, ¿cuál sería el resultado? __________ ¿Y si fuera hacia el norte y luego hacia el sur? ______

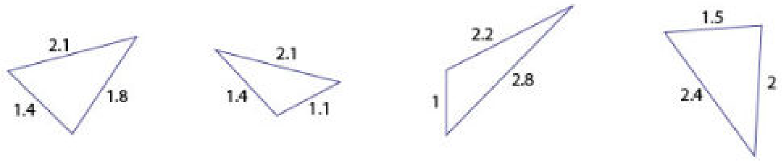
   c) Si, en el tercer problema, en lugar de losetas hexagonales se utilizaran otras en forma de triángulo equilátero, cada una de 10 cm de lado, ¿cuántas losetas se necesitarían para cubrir el mismo piso? ______________________

   d) Si, en el cuarto problema, la base del rectángulo midiera 2 cm más que la altura, ¿cuáles serían sus dimensiones ? ______________________

3. **¿En cuál de los siguientes triángulos se proporciona información suficiente para calcular su área usando el teorema de Pitágoras? Haz el cálculo.**



4. **Anota, junto a cada triángulo y según corresponda, "$a^2 + b^2 > c^2$" o "$a^2 + b^2 < c^2$" (considera que *c* representa la longitud del lado mayor). Escribe también si se trata de un triángulo obtusángulo o uno acutángulo.**



- Comenten, con ayuda del profesor, cómo se relacionan la actividad 4 y el teorema de Pitágoras. Redacten una versión extendida del teorema, que considere cualquier tipo de triángulo.

conect@mos

Practica el teorema de Pitágoras en

www.redir.mx/SCM3A-101

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídalas.

Secuencia 6 / lección 38

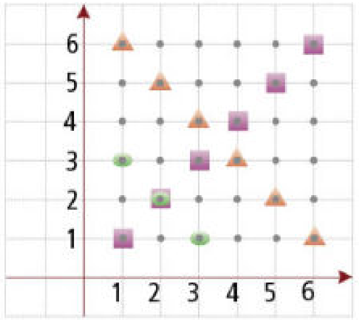
Que caiga tres, que no caiga tres

CONTENIDO: Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Si conoces la probabilidad de obtener 3 al lanzar un dado, ¿cómo calculas la probabilidad de que no caiga 3? Si conoces las probabilidades de obtener, por separado, 2, 4 o 6, ¿cómo calculas la probabilidad de que suceda cualquiera de las tres cosas?

1. Resuelve los siguientes problemas.
   a) Gisela debe tirar dos dados en un juego de mesa. Ella piensa que es de "mala suerte" obtener números iguales. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga "buena suerte"? _____
   b) Joaquín ha contestado al azar un reactivo de cuatro opciones, de las cuales sólo una es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte? _____ ¿Y de que no? _____
   c) Alfonso lanzará una moneda al aire cuatro veces. Ha apostado que caerá lo mismo en cada lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que pierda la apuesta? _____

2. En el siguiente esquema se aprecia el espacio muestral de un experimento que consiste en lanzar dos dados. Además, hay una fila de triángulos, una de rectángulos y otra de óvalos, que señalan, respectivamente, los espacios muestrales de tres eventos: **A, B y C.**



   a) Describe los eventos **A, B** y **C**.
   A: ______________________
   B: ______________________
   C: ______________________
   b) Completa la siguiente tabla.

Probabilidad de que ocurra	Probabilidad de que no ocurra
A:	A:
B:	B:
C: $\frac{3}{36}$	C:

- Compara, con ayuda del profesor, tus resultados con los de tus compañeros. Comenten cómo se calcula la probabilidad de que un evento NO ocurra si se conoce la probabilidad de que ocurra.

En contexto

Recorre el estudio de los números, la probabilidad y los códigos matemáticos en *Matemáticas*, de la Biblioteca de Aula.

Blum, Wolfgang, *Matemáticas*, México, SEP-Altea, serie Espejo de Urania, 2005.

3. Lee, con el grupo, la siguiente información. Al terminar, escriban en su cuaderno tres ejemplos de parejas de eventos complementarios.

El evento M, "salir 5 al lanzar un dado", es complementario del evento N, "no salir 5 al lanzar un dado". De manera abreviada, la probabilidad del evento M se expresa P(M), y la probabilidad del complemento de M se expresa $P(M^C)$

4. Trabaja en equipo. Calculen, con base en los siguientes eventos, las probabilidades que se piden.

   A: al lanzar un dado se obtiene número par.
   B: al lanzar dos dados, la suma de los números es un número impar.
   C: al lanzar dos dados, la suma de los números es 10.
   D: al sacar una bola de una bolsa que contiene tres bolas negras y dos rojas, sale una negra.

   P(A) = $P(A^c)$ =

   P(B) = $P(B^c)$ =

   P(C) = $P(C^c)$ =

   P(D) = $P(D^c)$ =

Convivimos

Además de usar tu intuición, emplea procedimientos matemáticos para tomar decisiones. ¿Cómo convencerías a un compañero de que no existe buena o mala suerte al tirar los dados?

5. Lee, con el grupo, la siguiente información. Al finalizar, efectúen lo que se pide.

La probabilidad de que un evento ocurra más la probabilidad de que ese mismo evento no ocurra es igual a 1. Es decir, la suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es 1.

Por ejemplo, en la actividad anterior:

$P(A) = \frac{1}{2}, P(A^C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{3}{36}, P(C^C) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$

- Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas de la actividad 4 con las de sus compañeros; si hay diferencias, intercambien ideas y corrijan lo necesario. Verifiquen que en los cuatro casos se trate de eventos complementarios y, por tanto, las probabilidades cumplan con lo expuesto en el recuadro anterior.

BLOQUE 2

Secuencia 6 / lección 39

Pelotas rojas o juguetes azules

CONTENIDO: Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Una pista

La probabilidad más alta que puede tener un evento es 1. Si alguna de las probabilidades fue mayor a 1, el resultado es incorrecto.

1. Laura está en una feria, y en uno de los juegos se ha ganado un premio, que elegirá al azar. Hay 160 pelotas y 40 juguetes. Los premios son de tres colores: 80 son rojos; 50, azules; y 70, verdes. De las pelotas, 30 son azules. Calcula las siguientes probabilidades. Si en algún caso supones que no hay información suficiente para encontrar la respuesta, explica en tu cuaderno por qué lo consideras así.

   a) La probabilidad de que el premio sea un juguete azul. ______

   b) La probabilidad de que el premio sea una pelota o un premio de color azul. ______

   c) La probabilidad de que el premio sea verde o azul. ______

   d) La probabilidad de que el premio sea un juguete o un premio de color rojo. ______

2. Completa las siguientes expresiones.

   a) La probabilidad de que el premio sea una pelota o un premio de color azul no es igual a la probabilidad de que sea una pelota más la probabilidad de que sea un premio azul porque ______

   b) La probabilidad de que el premio sea verde o azul es igual a la probabilidad de que sea verde más la probabilidad de que sea azul porque ______

   c) En el problema no se proporcionan los datos necesarios para calcular la probabilidad de que el premio sea un juguete o un un premio de color rojo, pues falta conocer ______

   d) La probabilidad de que el premio sea una pelota o un premio de color azul es igual a la probabilidad de que sea una pelota más la probabilidad de que sea un premio azul menos la probabilidad de que sea una pelota azul porque ______

Ya sabemos...

Dos eventos son mutuamente excluyentes cuando no tienen elementos en común. Por ejemplo, los eventos A = "premio verde" y B = "premio azul".

Reflexionamos

Si dos eventos, A y B, son complementarios, entonces P(A o B) = P(A) + P(B). ¿Por qué?

3. Alejandra ganó un premio en la feria. En el juego en que participó hay pulseras, peluches y relojes. Los premios son de color lila, rosa, azul cielo o café. No se sabe cuántos premios hay en total, ni cuántos de cada tipo, pero se conocen las siguientes probabilidades.

P(pulsera) = 14% P(reloj) = 53% P(reloj lila) = 45%
P(lila) = 60% P(rosa) = 21% P(rosa o azul cielo) = 28%

Calcula la probabilidad de que el premio sea…

   a) De cuaquier color, menos café. ______

   b) Un peluche. ______

   c) De color azul cielo. ______

   d) Un reloj o un premio de color lila. ______

4. En el problema anterior se sabe también que la probabilidad de que el premio sea una pulsera o un premio de color rosa es igual a la probabilidad de que sea rosa. Calcula la probabilidad de que el premio sea una pulsera o un premio de color lila. ______

5. Alejandra y Federico trataron de adivinar el premio que obtendrán. Las probabilidades que tienen de hacerlo son 12% y 93%, respectivamente.

   a) ¿Las predicciones son mutuamente excluyentes? ______ Explica por qué. ______

   b) Averigua qué premio creen Alejandra y Federico que obtendrán. Considera los porcentajes ya referidos, es decir, 12% y 93%, respectivamente. ______

conect@mos

Calcula más probabilidades en www.redir.mx/SCM3A-105

Trabaja en pareja. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, validen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

6. Federico jugará en la feria. Hay tres puestos que le gustan. En los tres se ofrecen pulseras, pelotas y relojes. Además, si gana un premio en cualquiera de los puestos, la probabilidad de que no sea un reloj es de 90%, y la probabilidad de que sea una pulsera es de 30%. Calcula cuántas pulseras y cuántas pelotas hay en cada puesto.

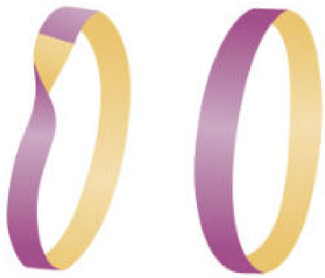
Pulseras	Pelotas	Total de premios
		200
		150
		300

Una pista

Para obtener el 10% de una cantidad, basta dividirla entre 10. A partir de ese 10%, es fácil obtener el 30%.

- Lee y comenta, con tus compañeros, la siguiente información. A partir de ella verifiquen sus resultados de los problemas de esta secuencia.

Cuando dos eventos, A y B, son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o B se calcula al sumar la probabilidad de que ocurra A más la probabilidad de que ocurra B. Es decir,
P(A o B) = P(A) + P(B)
Si los dos eventos no son mutuamente excluyentes, entonces hay que restar, a la suma de las dos probabilidades, la probabilidad de que sucedan ambos eventos, pues ha sido contada dos veces. Es decir,
P(A o B) = P(A) + P(B) − P(A y B)



Una tira de papel

Para las siguientes actividades necesitarás cuatro tiras de papel, cada una de 35 cm de largo y 4 cm de ancho, pegamento y dos lápices de distinto color.

- Une los extremos de cada tira para formar una banda, pero en dos de ellas da media vuelta a un extremo antes de pegarlos, como lo muestra la ilustración.
- Toma dos bandas, una pegada con media vuelta y otra normal. Haz, en cada una, un trazo longitudinal continuo por la mitad de una cara, que termine donde empezó.

¿Qué observas?

____

____

____

Colorea las caras de las dos bandas restantes.

¿Qué notas?

____

____

____

¿Cuántas caras tienen las bandas cuyos extremos se pegaron sin girar la tira?

____

¿Cuántas caras tienen las bandas cuyos extremos se pegaron dando media vuelta a uno de ellos?

____

La tira que uniste dando media vuelta a uno de sus extremos tiene una sola cara y es conocida como **banda de Möbius**, en honor al matemático alemán August Ferdinand Möbius, quien hizo el sorprendente descubrimiento de la existencia de superficies, como ésta, con un solo lado.
La banda de Möbius tiene más propiedades insospechadas y, como comprobarás a continuación, algunas de ellas se advierten al cortar la tira a lo largo, por la línea que marcaste.

Ahora necesitarás ocho tiras de papel, cada una de 40 cm de largo y 5 cm de ancho, para formar bandas de Möbius y bandas normales.

Toma una banda de Möbius y una normal. Córtalas por la mitad, como muestra la imagen.

¿Cuántas tiras obtuviste al cortar la banda de Möbius? ______________

¿La banda que obtuviste es normal o es de Möbius? ______________

¿Cuántas tiras obtuviste al cortar la banda normal? ______________

Ahora toma una de las tiras y da una vuelta completa a uno de sus extremos antes de unirlos.

¿Cuántas caras tiene? ______________

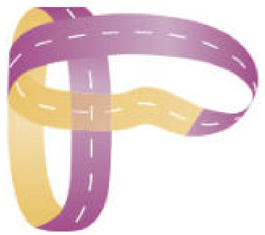
¿Qué sucede si cortas la tira de la misma manera que en los casos anteriores? ______________

____

Anota en la siguiente tabla el resultado que obtengas al dar las vueltas que se indican y cortar cada tira.

Número de vueltas	Resultado de un corte a la mitad	Características de la(s) banda(s) obtenida(s)	Dibujo
0	2 bandas	La mitad de ancho y el mismo largo	
$\frac{1}{2}$			
1			
$1 \text{ y } \frac{1}{2}$			
2			
$2 \text{ y } \frac{1}{2}$			

Elabora dos bandas, una normal y otra de Möbius; únelas formando un ángulo recto, como se muestra en la imagen, y después corta ambas a lo largo.



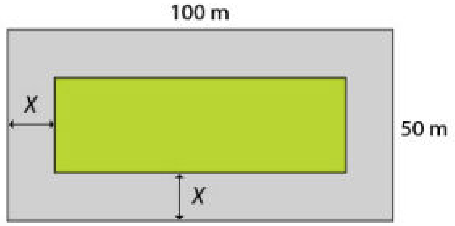
¿Qué sucedió? ______________

Si quieres conocer más información acerca de la banda de Möbius y otros objetos matemáticos con propiedades interesantes, entra en

matesmates.wordpress.com/2011/02/16/la-cinta-de-moebius/
recursostic.educacion.es/descartes/web/matemagicas/pages/delices/textes/mobius.htm

Selecciona la opción correcta.

1. Se colocará una banqueta en el perímetro de un terreno rectangular de 50 m × 100 m, pero se dejará el centro como área verde. El presupuesto alcanza para pavimentar 1 400 m^2, y se desea que el ancho de la banqueta sea uniforme. ¿Qué ancho tendrá la banqueta como máximo?



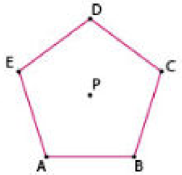
a) 5 m

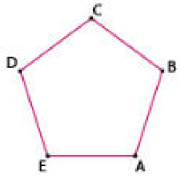
b) 6 m

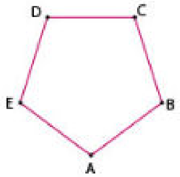
c) 8 m

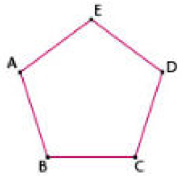
d) 10 m

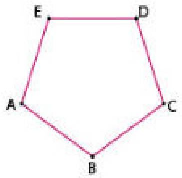
2. El pentágono de la derecha es regular. Si su centro de rotación es el punto **P**, ¿qué figura se obtiene al rotarlo 72° en sentido contrario a las manecillas del reloj?



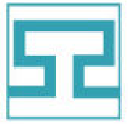
a) 

b) 

c) 

d) 

3. ¿Qué diseño tiene simetría central pero no axial?

a) 

b) 

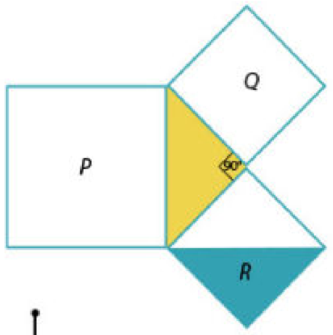
c) 

d) 

4. Eric lanzará un dado en su último turno en un juego de mesa. Para ganar necesita un 5 o un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

a) $\frac{3}{6}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{6}-\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6}+\frac{2}{6}$ d) $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}$

5. Se han trazado tres cuadrados en los lados de un triángulo rectángulo. Si **P** y **Q** representan el área de los cuadrados respectivos, y **R**, la del triángulo azul, ¿cómo están relacionados **P**, **Q** y **R**?



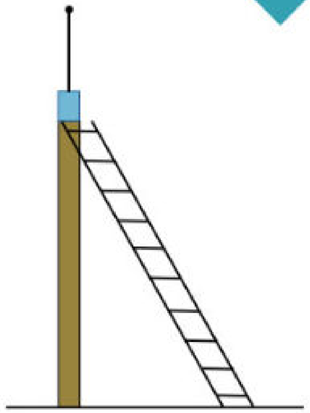
a) $P^2 = Q^2 + R^2$

b) $P = Q + R$

c) $P = Q + 2R$

d) $P^2 = Q^2 + 2R^2$

6. Para instalar una antena en un poste de 17.6 m de altura se usó una escalera como se muestra en la figura. ¿Qué longitud tiene la escalera si ésta se colocó a 8.6 m de la base del poste?



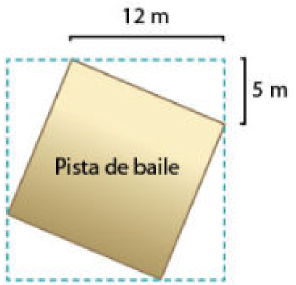
a) 9.5 m

b) 15.3 m

c) 19.6 m

d) 26.2 m

7. ¿Cuánto mosaico se requiere para cubrir la pista de baile?



a) 144 m^2

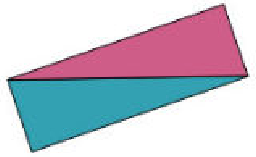
b) 169 m^2

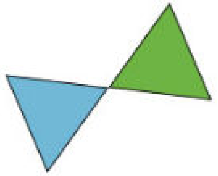
c) 189 m^2

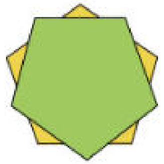
d) 289 m^2

Haz lo que se indica.

8. En cada pareja, una figura es producto de la rotación de la otra. Marca el centro de rotación en cada caso.







Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Comunicar información matemática

Simetría y belleza

Durante mucho tiempo, las transformaciones geométricas, como traslaciones, giros y simetrías, han sido utilizadas en la ingeniería, la arquitectura y muchas manifestaciones artísticas más. Algunas teorías señalan que esta fascinación por la geometría dinámica y la simetría tiene su origen en la estructura de los seres vivos. La simetría en la naturaleza es el resultado de un largo proceso evolutivo e, instintivamente, los animales eligen a compañeros con una anatomía lo más simétrica posible.

Pregunta 1. Busca en tu entorno tres objetos que presenten simetría. Dibújalos e indica qué transformaciones geométricas utilizaste para ello.

Pregunta 2. Escribe una posible ventaja (que no sea puramente estética) que tenga un edificio simétrico sobre otro no simétrico.

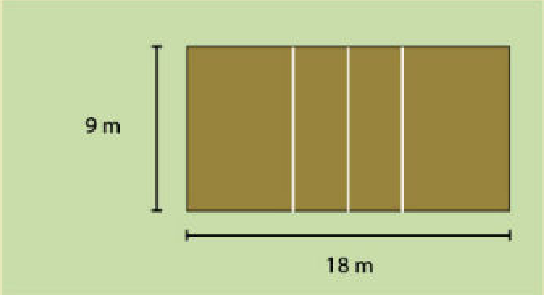
Pregunta 3. Escribe una posible ventaja (que no sea la preferencia que otros miembros de su especie puedan tener por él) que tenga un animal simétrico sobre otro no simétrico.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

La cancha de volibol

Sofía y sus amigas trazaron en el patio de su escuela una cancha de volibol como la siguiente.



Pregunta 1. Utilizando sólo cinta métrica, ¿como verifica Sofía que la cancha tenga forma rectangular, es decir, que sus ángulos midan 90°?

Pregunta 2. Si la cancha tiene forma rectangular, ¿cuánto mide cada diagonal?

a) 27 m b) 25.4 m c) 20.1 m d) 12.7 m

Pregunta 3. ¿Cuánto mide la diagonal de media cancha (un cuadrado de 9 m de lado)?

Autoevaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, tendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar diversas situaciones.				
Resuelvo ecuaciones cuadráticas mediante la factorización.				
Identifico las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.				
Elaboro diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.				
Interpreto las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se trazan a partir de los lados de un triángulo rectángulo.				
Uso el teorema de Pitágoras para resolver problemas.				
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).				
Interpreto y uso la escala de la probabilidad.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?

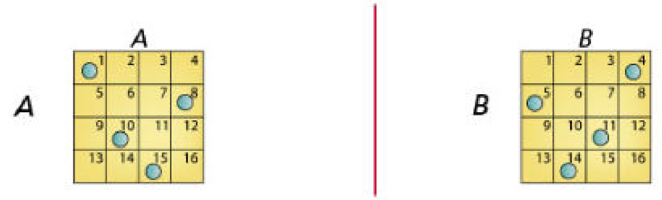
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Y para terminar...

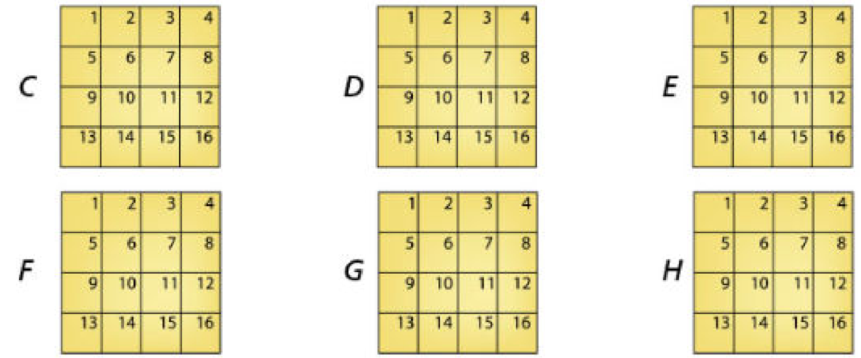
Dibujemos puntos

Dibuja en cada tablero cuatro puntos, de manera que en cada fila, cada columna y cada diagonal principal haya un solo punto.

A continuación se muestran dos soluciones posibles.



Hay otras seis soluciones posibles si se dibujan los puntos en otras casillas. Encuéntralas.



Las ocho soluciones están relacionadas entre sí mediante simetrías y rotaciones. Por ejemplo, observa los puntos de las soluciones A y B, y notarás que son simétricos respecto a la línea roja.

En este otro ejemplo, la solución de la derecha se obtiene rotando 90° la solución A.

- Si no has encontrado todas las soluciones posibles, aplica simetrías y rotaciones para hallarlas. Los ejes pueden ser verticales, horizontales o inclinados.
- Busca las relaciones de simetría y rotación que hay en todas las soluciones. Verifica que todas las soluciones se puedan obtener a partir de una sola, ya sea mediante una o dos transformaciones.

BLOQUE 3

Aprendizajes esperados

- ✓ Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- ✓ Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Familias de lenguas

Observa a las personas de la imagen. ¿De dónde son? ¿Para qué están reunidas?

En México existen cerca de 300 lenguas diferentes, divididas en 11 familias lingüísticas. Por ejemplo, el zapoteco, el mixteco y el mazahua pertenecen a la familia lingüística oto-mangue; esto significa que, aunque las tres son diferentes en la actualidad, tienen un origen común, es decir, surgieron a partir de una misma lengua. La glotocronología es una técnica lingüística-matemática que, por medio de la resolución de ecuaciones, permite saber en qué momento de la historia dos lenguas distintas fueron la misma. Se basa en un dato curioso: 14% de las palabras básicas de una lengua es sustituido cada 1 000 años.

1. Las palabras más habituales suelen escribirse de forma similar en los idiomas que tienen un origen común. Busca alguna que se escriba de forma parecida en varios idiomas.
2. Supón que tu idioma empieza a dividirse hoy en dos. Si el principio de la glotocronología se mantiene en el transcurso del tiempo, ¿qué porcentaje de palabras básicas compartirán en 13 000 años?
3. ¿Por qué es importante la preservación de las lenguas indígenas?

Si quieres conocer más acerca de la clasificación y el origen de las lenguas indígenas en nuestro país, entra a

www.redir.mx/SCM3A-115

Las ecuaciones sirven para resolver problemas muy variados; incluso ayudan a estudiar aspectos aparentemente tan lejanos a las matemáticas como la evolución de las lenguas.

En este bloque aprenderás a resolver problemas diversos utilizando ecuaciones de segundo grado, así como a leer y elaborar gráficas de este tipo de ecuaciones.

BLOQUE 3

Secuencia 1 / lección 40

Una fórmula útil

CONTENIDO
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Ya aprendiste a resolver ecuaciones de segundo grado mediante tanteo y factorización. ¿Hay otras técnicas? Claro que sí. La fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. La estudiarás en esta secuencia.

1. **Analiza, en equipo, el siguiente problema. Hagan lo que se indica.**

Dos veces el cuadrado de un número más tres veces el mismo número, más nueve unidades da 44. ¿Qué números cumplen estas condiciones?

a) Formulen una ecuación con la que se resuelva el problema.

____

b) Rescríbanla en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$.

____

c) Anoten los valores de a, b y c. Verifíquenlos con ayuda del profesor.

$a =$ _____ $b =$ _____ $c =$ _____

d) Para encontrar las soluciones de la ecuación, sustituyan, en la fórmula general, a, b y c por sus valores correspondientes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

e) Hagan las operaciones indicadas en la fórmula general. Si hicieron todo bien, encontrarán dos valores para x.

____

____

f) ¿Cuáles son las dos soluciones de la ecuación?

$x_1 =$ _____ $x_2 =$ _____

g) Verifiquen que las soluciones cumplan las condiciones del problema.

- **Con ayuda del profesor comparen sus resultados con los de sus compañeros. Si hay diferencias, identifiquen los errores y corrijan lo necesario. Recuerden que han encontrado el resultado correcto si los números encontrados cumplen las condiciones establecidas.**

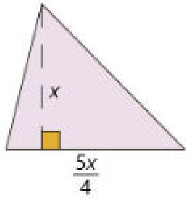
2. **Analicen los siguientes problemas. Formulen, para cada uno, la ecuación correspondiente y resuélvanla con la fórmula general. Anoten la solución de cada problema.**

a) Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho. Si el largo aumenta 40 m y el ancho, 6 m, el área se duplica. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno original?

Ecuación: ______________________________

Dimensiones del terreno original: ____________________

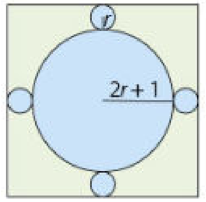
b) Si el área del siguiente triángulo es 10 cm², ¿cuál es el valor de x?



Ecuación: ______________________________

Medida de la altura: $x =$ __________

c) En la figura de la derecha, el radio del círculo más grande mide 1 cm más que el doble de cada radio pequeño. Si él área del cuadrado es 16 cm², ¿cuánto mide el radio de cada círculo?



Ecuación: ______________________________

Radio pequeño: $r =$ __________

Radio grande: $2r + 1 =$ __________

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros. En particular, comenten por qué en el tercer inciso sólo una de las dos soluciones de la ecuación resuelve el problema satisfactoriamente.**

3. **Utiliza el método que creas conveniente para resolver las siguientes ecuaciones.**

a) $0.5x^2 + 1.5x - 2 = 0$

b) $3r^2 + 1 = 4r$

c) $2t(t + 3) + 3 = 0$

d) $4a^2 = 2a + 3$

e) $0.75p^2 - 1.75p + 0.5 = 0$

f) $-h(h - 3) + 1 = 4h - 1$

g) $(2y - 1)^2 = 0$

h) $-0.5(n + 2)^2 = 0$

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros; si algunas no coinciden, analicen quién tiene razón y corrijan lo necesario. Comenten por qué las ecuaciones de los incisos g) y h) se resuelven fácilmente, sin necesidad de usar la fórmula general.**

Secuencia 1 / lección 41

¿Cuántas soluciones?

CONTENIDO

Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

1. Trabaja en equipo. Resuelvan, en su cuaderno y con el método que deseen, las siguientes ecuaciones. Después completen la tabla.

Ecuación	Soluciones	Valores de los coeficientes	Valor de $b^2 - 4ac$	¿Cuántas soluciones hay?
$3x^2 - 5x - 2 = 0$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		Dos.
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		Una.
$4x^2 - 3x + 1 = 0$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		Ninguna.
$-4x^2 + 1 = 0$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		
$x^2 - 5x = 0$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		
$4x^2 + 6x = -9$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		
$x - 3x^2 = 1$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		
$x^2 = -1$	$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______	$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______		

- Comenten, con ayuda del profesor, sus resultados de la tabla. Discutan cuál debe ser el valor de $b^2 - 4ac$ para que las ecuaciones de segundo grado tenga dos soluciones, una solución o no tengan solución. Después lean la información y completen lo siguiente.

La expresión $b^2 - 4ac$, que aparece dentro de la raíz en la fórmula general, recibe el nombre de **discriminante**, y su valor puede ser 0, mayor que 0 o menor que 0.

» Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene __________ solución.
» Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene ____________________.
» Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación ____________________.

2. Plantea una ecuación para cada problema y, sin resolverla, escribe cuántas soluciones tiene la ecuación.

a) Un número elevado al cuadrado da como resultado –4. ¿Qué número es?

Ecuación: ____________ Discriminante: __________

Número de soluciones: ______

b) Un número se multiplica por 9, al producto se le suma el cuadrado del mismo número y se obtiene como resultado –16. ¿De qué número se trata?

Ecuación: ____________ Discriminante: __________

Número de soluciones: ______

c) Si al doble del cuadrado de un número se le suma seis veces ese mismo número, se obtiene –4. ¿Qué número es?

Ecuación: ____________ Discriminante: __________

Número de soluciones: ______

3. Identifica, sin resolverlas, cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución; para las que sí la tengan, escribe en tu cuaderno un problema que corresponda a la ecuación y resuélvelo.

a) $2x^2 + x - 1 = 0$ b) $-x^2 + 3x - 4 = 0$ c) $-x^2 + 4x = 0$

d) $0.5x^2 + 2 = 0$ e) $\frac{x^2}{4} + 2x + 4 = 0$ f) $-x^2 + x + 2 = 0$

4. Inventa ejemplos de ecuaciones de segundo grado completas, que cumplan los siguientes criterios…

a) Con dos soluciones: ____________________

b) Con una solución: ____________________

c) Sin solución: ____________________

Ya sabemos...

La forma general de la ecuación de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$. Si falta el segundo término (bx) o el tercero (c), se trata de una ecuación incompleta.

- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Respondan lo siguiente, considerен que todas las variables son números positivos.

a) ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$? __________

b) ¿Y una del tipo $ax^2 + c = 0$? ______________

c) ¿Qué valor debe tener k en la ecuación $x^2 - kx + 4 = 0$ para que las dos soluciones de la ecuación sean iguales? __________

BLOQUE 3

Secuencia 1 / lección 42

Algunos problemas

CONTENIDO
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

1. Trabaja en equipo. Hagan lo siguiente en cada problema.

» Formulen una ecuación con la que se resuelva el problema.
» Determinen las soluciones.
» Comprueben que éstas cumplan las condiciones establecidas.

Primer problema. Al abrir un libro, descubro que el producto que se obtiene al multiplicar los números de página de las dos páginas que estoy viendo es 9312. ¿Qué páginas son?

Convivimos

Cuando trabajen en equipo, pregúntense: "¿La solución es única o hay otras?", o "¿De qué otra manera se resolvería?". Al hacerlo, tal vez se sorprendan al descubrir procedimientos más sencillos o ingeniosos, propuestos por ti o por tus compañeros.

Segundo problema. En un triángulo rectángulo, el cateto largo mide 7 unidades más que el corto; a su vez, la hipotenusa mide 1 unidad más que el cateto largo. ¿Qué área tiene dicho triángulo?

Tercer problema. Se buscan tres números impares consecutivos con la siguiente característica: si al cuadrado del número mayor se le restan los cuadrados de los otros dos, se obtiene 7. ¿Cuáles son los tres números?

conect@mos

Resuelve problemas usando ecuaciones cuadráticas en

www.redir.mx/SCM3A-120

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, validen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

Cuarto problema. La suma de dos números da 12 y la de sus cuadrados, 74. ¿Qué números son?

Quinto problema. Juan compra y vende mercancía con base en el siguiente criterio: si un artículo le cuesta \$10.00 gana 10% al venderlo; si le cuesta \$30.00, 30%; y si le cuesta \$48.00, 48%. Si vendió un artículo en \$56.00, ¿cuánto le costó?

- Compara, con ayuda del profesor, tus resultados con los de tus compañeros. Discutan en qué casos las dos soluciones de la ecuación resuelven el problema.

2. Armen, usando los datos expresados en las etiquetas, las ecuaciones que resuelven cada problema anterior. Busquen el primero y el segundo miembro de cada ecuación, y escríbanlos en la tabla.

$x(x+1)$ | 9312 | $(x+5)^2-(x+3)^2-(x+1)$ | 56 | $x^2+(x+7)^2$ | 7 | $x^2+(12-x)^2$ | $(x+8)^2$ | 74 | $x+(\frac{x}{100})x$

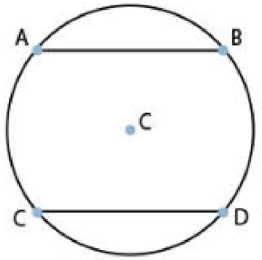
Problema	Primer miembro		Segundo miembro	Forma general de la ecuación
1°		=		
2°		=		
3°		=		
4°		=		
5°		=		

3. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas y anota junto a cada uno la respuesta.

a) Si al triple del cuadrado de un número se le resta tres veces el mismo número, y al resultado se le suma 8, se obtiene 68. ¿Cuál es ese número? __________

b) La suma de las áreas de tres cuadrados es 418 m². El lado del cuadrado más grande mide 3 m más que el del mediano; y el lado del mediano mide 5 m más que el del chico. ¿Cuánto miden los lados de cada cuadrado? __________

c) En un círculo, la distancia entre dos cuerdas paralelas congruentes es de 12 cm. Cada una mide 6 cm más que el radio. Determina el radio.



- Comenta tus resultados con tus compañeros. En caso de haber diferencias, identifiquen los errores y corrijan lo necesario.

BLOQUE 3

Secuencia 2 / lección 43

Congruencia y cuadriláteros

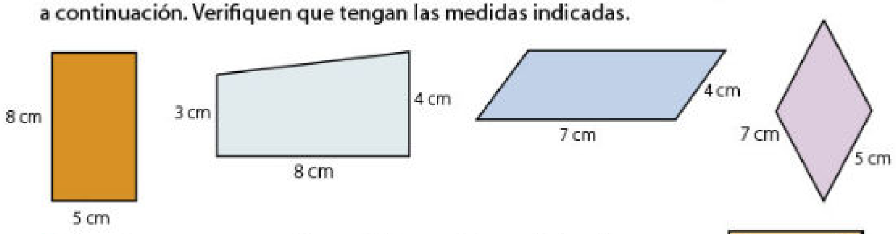
CONTENIDO
Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

¿Has usado la congruencia de triángulos para justificar o deducir alguna propiedad de las figuras geométricas? ¿O la semejanza de triángulos para calcular alturas inaccesibles? En esta secuencia aprenderás a dar diferentes usos a la congruencia y la semejanza.

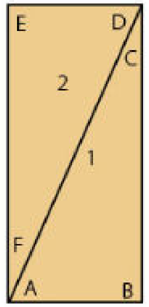
Ya sabemos...

Los triángulos son figuras muy útiles para deducir y probar propiedades de otras figuras geométricas. Por ejemplo, para justificar que en todo cuadrilátero la suma de sus ángulos internos es 360°, basta tener en cuenta que cualquier cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos, y que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

1. **Trabaja en equipo. Reproduzcan en una hoja de papel los cuadriláteros que se muestran a continuación. Verifiquen que tengan las medidas indicadas.**



a) En cada uno tracen una diagonal, de acuerdo con el ejemplo en el rectángulo de la derecha. Marquen los vértices como se indica. Numeren los triángulos que se formen.



b) Recorta por la línea que trazaste y sobrepón los triángulos de manera que sus lados coincidan. Si esto se cumple, los triángulos son congruentes. Con base en el triángulo 2 de la figura derecha, ¿qué lado mide lo mismo que el segmento… en el triángulo 1?

» $\overline{AB}$? _______ $\overline{AC}$? _______ $\overline{BC}$? _______

Contesta, en tu cuaderno y para los cuadriláteros en que se forman triángulos congruentes, las preguntas del inciso b).

c) Indica en qué cuadriláteros se forman triángulos congruentes y en cuáles no.

____

d) ¿Qué propiedad tienen en común los lados de los cuadriláteros en que se forman triángulos congruentes, que no tienen los otros?

____

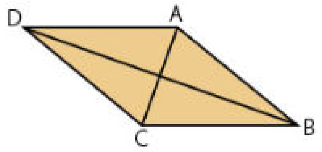
Reflexionamos

En todo paralelogramo los lados opuestos miden lo mismo. ¿Por qué?

Una pista

En un paralelogramo los lados opuestos son paralelos.

2. **En el paralelogramo de la izquierda se trazaron las diagonales y se rotularon los vértices con letras.**



a) Encuentra un triángulo congruente con el triángulo ABD. _______ ¿Qué criterio de congruencia explica esa relación? Recuerda que sólo sabes que la figura es un paralelogramo.

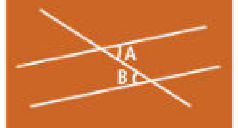
____

sm

b) Encuentra un triángulo congruente con el triángulo ABC _______ ¿Qué criterio de congruencia explica esa relación? _______

Una pista

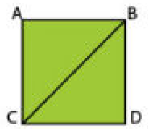
Los ángulos alternos internos entre paralelas miden lo mismo.



∠A = ∠B

3. **Analiza por qué, en el cuadrado de la derecha, los triángulos CAB y BCD son congruentes.**

» El segmento $\overline{AB}$ es congruente (mide lo mismo) con el segmento $\overline{CD}$.
» Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes entre sí.
» Los ángulos BAC y BDC miden lo mismo por ser ángulos rectos.



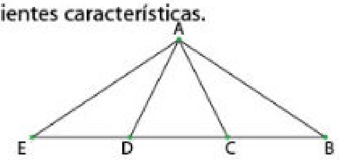
a) ¿Qué criterio de congruencia se usó para explicar esa relación? _______

b) Determina, con la información inferida a partir del cuadrado, al menos otro criterio de congruencia para afirmar que los triángulos son congruentes. ¿Cuál es? _____ Explica por qué. ____

____

4. **Observa la figura de la derecha. Ésta tiene las siguientes características.**

» El triángulo ABE es isósceles.
» D es el punto medio del segmento $\overline{CE}$.
» C es el punto medio del segmento $\overline{BD}$.



Una pista

En los triángulos isósceles, los ángulos de la base miden lo mismo.

a) Sin dibujar, justifica con alguno de los criterios de congruencia, que los triángulos AEC y ABD son congruentes. ____

____

____

b) Traza un triángulo isósceles distinto al anterior y verifica tu respuesta.

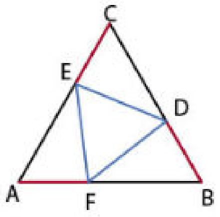
5. **En la figura de la derecha, el triángulo ABC es equilátero, y los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son congruentes.**

Encuentra tres triángulos congruentes y explica por qué lo son. ____

____

____

____



sm

* **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten cómo llegaron a ellas.**

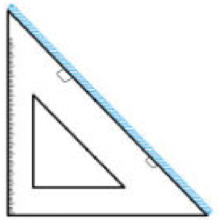
BLOQUE 3

Secuencia 2 / lección 44

¿Cuánto mide el poste?

CONTENIDO
Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

1. Trabaja en equipo. Sigan las instrucciones para elaborar el siguiente aparato, con el cual medirán distancias de manera aproximada (por ejemplo, la altura de un árbol, de un asta bandera o de un edificio).

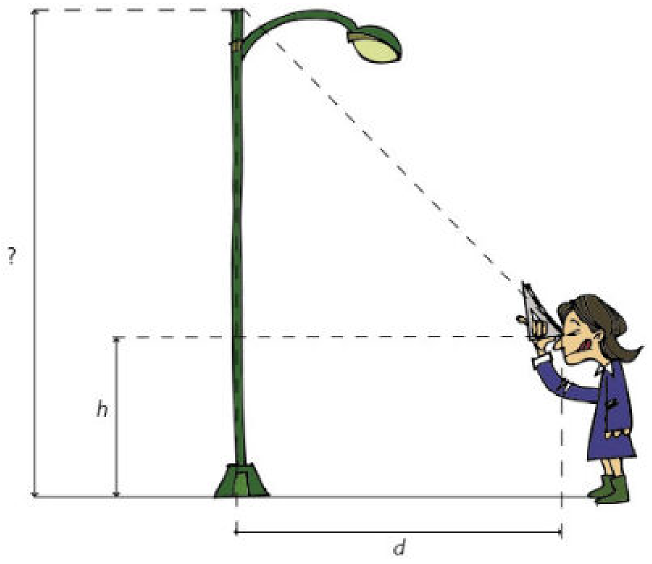


a) Peguen un popote en el lado más largo de la escuadra que tiene forma de triángulo rectángulo isósceles.

b) Elijan un objeto alto; por ejemplo, un árbol, un poste o un asta bandera. Hagan lo siguiente para medir su altura.

» Uno de ustedes mire por el orificio del popote, manteniendo uno de los lados pequeños de la escuadra en posición horizontal. Desplácese hacia atrás o hacia adelante hasta que ubique el punto más alto del objeto que medirán.

» Otro de ustedes, con un metro o una cinta métrica, mida la distancia (*d*) que hay entre la escuadra y el objeto que medirán, y la altura (*h*) a la que se encuentra la escuadra, como se ve en la imagen.

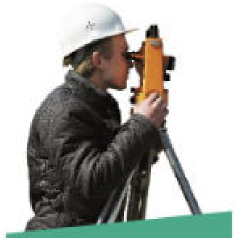


» Busquen, con esos datos, una manera de calcular la altura del objeto seleccionado.

Anótenla aquí. ______________________________

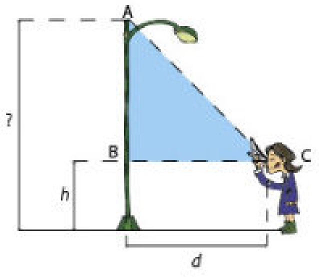
____

* Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Al finalizar, completen el siguiente procedimiento para calcular la altura de un poste. Es probable que algún equipo haya hecho algo similar en la actividad anterior.



En contexto

El teodolito es un instrumento que tiene diferentes usos en el campo de la topografía; entre ellos destaca la medición de distancias por taquimetría o estadía, es decir, el cálculo de distancias sin medirlas directamente.



a) Observen el triángulo **ABC**. Éste es semejante a la escuadra. ¿Por qué?

____

b) Si es semejante, entonces, ¿qué tipo de triángulo es **ABC**? ______________

c) ¿Cuáles son los lados iguales en el triángulo ABC? ______________

d) ¿A qué lado del triángulo **ABC** corresponde la distancia *d*? ______________

e) Si *d* mide 3 m, ¿cuánto mide $\overline{AB}$? ______________

f) Si la escuadra se colocó a 1.50 m del piso (*h*), ¿cuál es la altura del poste? ______________

2. Resuelve los siguientes problemas.

a) Un equipo midió, con su escuadra, la altura de un árbol. Al hacerlo averiguó que $d = 4.20$ m y $h = 1.55$ m. ¿Cuánto mide el árbol? ______________

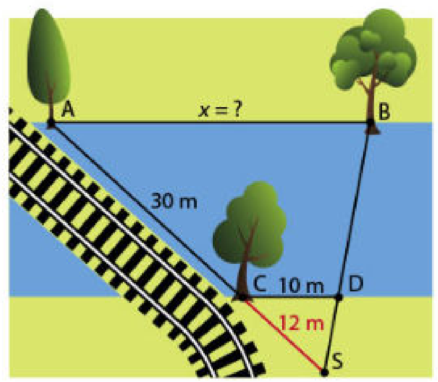
b) Una escuadra se ha colocado a una altura (*h*) de 1.60 m del piso y con ella se ve la punta de un poste de 4 m. ¿Cuál es el valor de la distancia *d*? ______________

c) En la imagen de los árboles, los segmentos **AB** y **CD** son paralelos.

» ¿Qué triángulos semejantes identificas?

____

» ¿Qué distancia hay entre los árboles A y B? $x =$ ______ *m*



3. Trabaja en equipo. Usen su escuadra para calcular alguna altura inaccesible distinta de la que calcularon en la actividad 1.

conect@mos

Aprende más sobre semejanza de triángulos en

www.redir.mx/SCM3A-125

Lee la información que se presenta. Al finalizar, explica en tu cuaderno cómo se relacionan las figuras semejantes y los dibujos a escala.

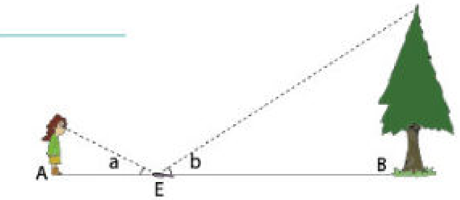
Calcular distancias

CONTENIDO
Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

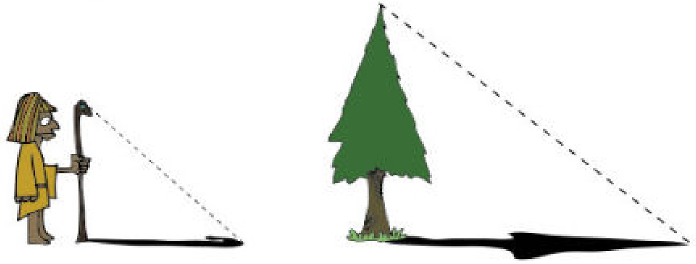
Una pista
Encuentra los triángulos semejantes en cada situación.

1. Resuelve, en equipo, los siguientes problemas.

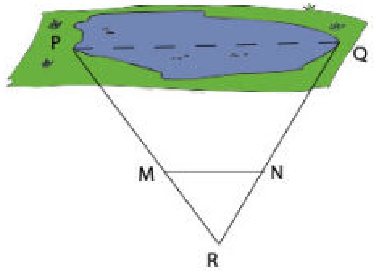
a) Para medir la altura del árbol, una mujer colocó un espejo en el piso, a 30 m del árbol (punto E); en éste se refleja la punta del árbol. Se sabe que los ángulos **a** y **b** miden lo mismo. Si $\overline{AE}$ = 2 m y los ojos de la mujer están a 1.60 m del piso, ¿cuál es la altura del árbol? ________



b) La vara de un hombre mide 1.5 m de altura y la sombra, 1.8 m. Si la sombra del árbol mide 3 m y los rayos de sol son paralelos, ¿cuál es la altura del árbol? ________



c) Para medir la parte más ancha de una laguna (PQ) se pusieron cuerdas PR, QR y MN con el fin de formar los triángulos PQR y MNR, de manera que $\overline{MN}$ es paralela a $\overline{PQ}$.

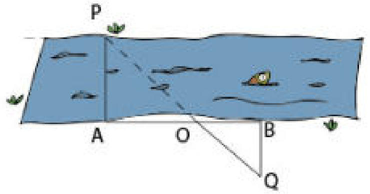


Si $\overline{PR}$ = $\overline{QR}$ = 50 m, $\overline{PM}$ = $\overline{QN}$ = 30 m y $\overline{MN}$ = 20 m, ¿cuál es el ancho de la laguna? ________

- **Comparen sus resultados con los de sus compañeros.**

2. Analicen el diagrama inferior de la izquierda y anoten cómo podría medirse el ancho de un río ($\overline{PA}$).

____

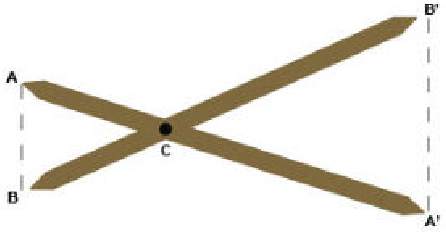


Si $\overline{AO}$ = 15 m, $\overline{OB}$ = 10 m y $\overline{BQ}$ = 9 m, ¿cuál es el ancho del río? ________

- **Comparen sus respuestas de la actividad anterior. Comenten qué triángulos semejantes usaron para resolver el problema y cómo dedujeron que debían usarlos.**

3. Lee la información y contesta.

Un *compás de escala* es un instrumento que sirve para reducir o amplificar figuras a una escala determinada. Puede construirse con dos palos del mismo tamaño que terminen en punta en ambos lados. Estos se sujetan por el punto **C**, como se muestra en la figura, cuidando que se cumplan las igualdades $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ y $\overline{CA'}$ = $\overline{CB'}$, y uniéndolos de modo que el compás pueda abrirse y cerrarse.



a) En este compás se aplica la semejanza de triángulos. ¿Qué triángulos son semejantes en él? ________

¿Cómo se sabe que son semejantes? ________

____

b) Se ha construido un compás con dos palos de 15 cm, sujetados de modo que $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = 5 cm, y $\overline{CB'}$ = $\overline{CA'}$ = 10 cm.

» Cuando se abre el compás hasta que la parte $\overline{AB}$ mide 8 cm, ¿cuánto mide la parte $\overline{A'B'}$? ________

» Si $\overline{A'B'}$ se abre a 20 cm, ¿cuánto mide $\overline{AB}$? ________

» Y si $\overline{AB}$ mide *x* cm, ¿cuánto mide $\overline{A'B'}$? ________

» ¿Qué razones de semejanza se usan en este compás? ________

____

c) Se desea construir un compás de escala que permita hacer ampliaciones 3 a 1 o reducciones 1 a 3. Anota la posible medida de los palos, y dónde deben unirse (punto C).

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros. Inventen un problema relacionado con alturas inaccesibles, que pueda resolverse mediante semejanza de triángulos.**

____

____

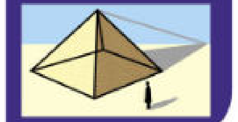
Paralelas y segmentos proporcionales

CONTENIDO: Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

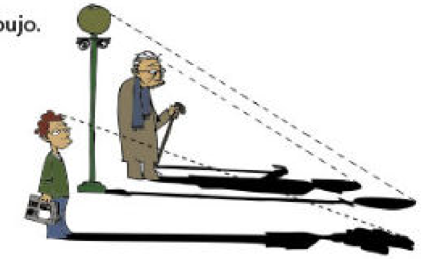
¿Has observado la sombra de los objetos? ¿Has escuchado la frase "los rayos del sol caen de forma paralela"? Aunque no lo consideres así, esto se relaciona con las matemáticas y, en particular, con las figuras semejantes y la proporcionalidad de segmentos. En esta secuencia conocerás el teorema de Tales, uno de los más importantes de la geometría, y aprenderás a usarlo para calcular distancias.

En contexto

Desde la Antigüedad se ha usado el método de sombras para calcular alturas difíciles de medir directamente. Se cree que el matemático y filósofo griego Tales de Mileto calculó de esta manera la altura de una pirámide egipcia en el año 600 a. C.



1. Trabaja en equipo. Observen el dibujo.



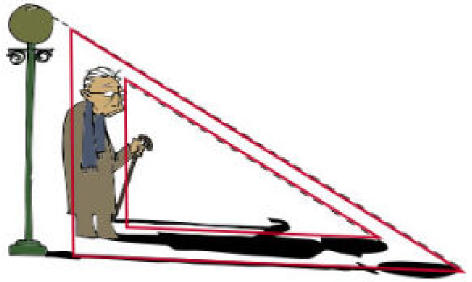
a) ¿Qué sombra está mal dibujada? ______

b) ¿Cómo lo sabes? ______

______

- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Después comenten la siguiente información con ayuda del profesor.

Las sombras de los objetos los alargan o acortan, pero conservan sus proporciones, es decir, las razones entre las longitudes del objeto original (el doble, el triple…) son iguales a las razones entre las longitudes de la sombra. En otras palabras, la sombra es una copia a escala del objeto.



2. Observa los triángulos rojos del dibujo.

a) ¿Son semejantes? ____ ¿Cómo lo sabes? ______

b) ¿Sus lados son proporcionales? ______ ¿Cómo lo sabes? ____

______

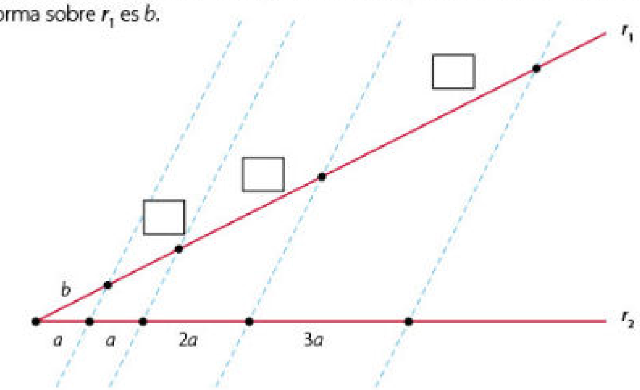
c) ¿Serían semejantes si los rayos del sol no fueran paralelos? ____

¿Por qué? ______

______

3. En el siguiente dibujo, dos rectas, r_1 y r_2, están cortadas por un haz de rectas paralelas. Éstas no están a la misma distancia entre sí.

Los segmentos que se forman sobre r_2 miden a, a, $2a$ y $3a$. La medida del primer segmento que se forma sobre r_1 es b.



Entre las siguientes medidas, selecciona y anota en los recuadros superiores las que corresponden a la recta r_1.

$3a$ $2a$ $5b$ $3b$ $2b$ b a

Una pista

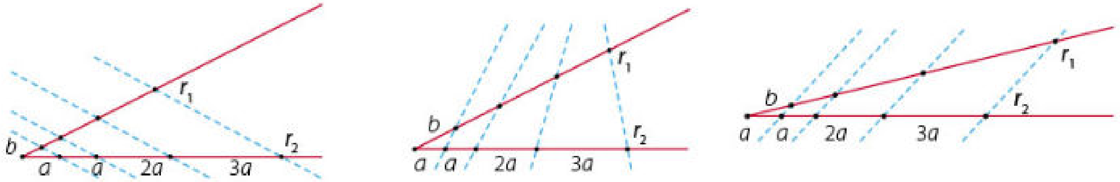
Busca triángulos semejantes. Recuerda que los ángulos correspondientes entre paralelas miden lo mismo.

4. Trabaja en pareja. Verifiquen sus respuestas anteriores midiendo los segmentos. Noten que los segmentos que se forman sobre r_1 no miden lo mismo que los segmentos que se forman sobre r_2, pero sí son proporcionales, es decir, la razón que guardan se conserva. Determinen por qué sucede esto.

» ¿Ocurriría lo mismo si las rectas paralelas tuvieran una inclinación distinta?

» ¿Y si las rectas que cortan a r_1 y r_2 no fueran paralelas?

» ¿Y si las rectas r_1 y r_2 formaran un ángulo distinto?



- Comenten sus respuestas con el grupo. Después lean la siguiente información y compárenla con lo trabajado en esta lección.

En esta lección has estudiado el **teorema de Tales**: si tres o más paralelas cortan dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

En contexto

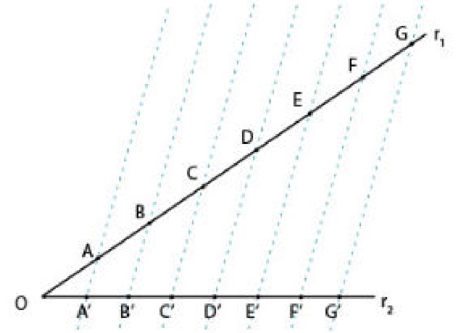
Tales de Mileto vivió en la ciudad de Mileto entre 624 y 546 a. C. Fue uno de los Siete Sabios de la antigüedad. Se tiene información acerca de sus escritos y su vida apenas por referencias de otros autores.
Fue filósofo de la escuela jónica y autor de una cosmología de la que sólo conocemos fragmentos. Se destacó principalmente por sus trabajos en filosofía y matemáticas. En esta última ciencia se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico, por lo que se le considera el padre de la geometría.

Secuencia 3 / lección 47

El teorema de Tales y sus aplicaciones

CONTENIDO: Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

1. Trabaja con un compañero. Resuelvan la actividad, sin medir. En la siguiente figura, los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$, que están sobre la recta r_1, miden lo mismo. Los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$ y $\overline{GG'}$ son paralelos entre sí.



a) Marquen la afirmación correcta con ✔.

- [ ] Los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$ y $\overline{F'G'}$ miden lo mismo y son iguales a los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$.
- [ ] Los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$ y $\overline{F'G'}$ son iguales entre sí, pero no miden lo mismo que los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$.
- [ ] Los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$ y $\overline{F'G'}$ no miden lo mismo entre sí.

b) Tracen otra recta (r_3) que inicie en el punto O y sea cortada por las paralelas. ¿Qué ocurre con los segmentos que se forman sobre r_3? ______

______

c) Expliquen lo anterior. El teorema de Tales puede servir para su explicación. ______

______

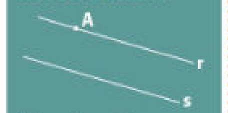
d) Midan los segmentos con su regla para verificar sus respuestas.

- Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Lean, con el profesor, lo siguiente.

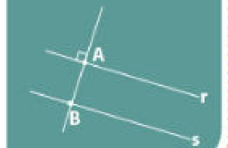
Toda recta cortada por un haz de paralelas equidistantes (que están a la misma distancia entre sí) queda dividida en segmentos que miden lo mismo.

Ya sabemos...

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, s y r, se ubica un punto en una de ellas, por ejemplo, A sobre la recta r.



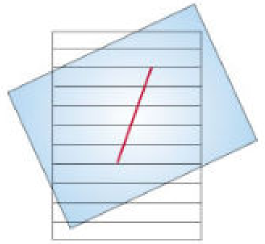
Después se traza una perpendicular a r que pase por A hasta intersecar a s. La medida del segmento $\overline{AB}$ es la distancia entre las rectas r y s.



2. Trabaja con un compañero. Efectúen lo siguiente.

a) Dividan el siguiente segmento en siete partes iguales. Háganlo sin medir con regla. Para ello, analicen la figura de la actividad 1 y las relaciones que hay entre los segmentos.

Una estrategia para dividir un segmento en partes iguales sin medir con regla es usar una hoja rayada. En el ejemplo inferior, el segmento rojo dibujado en la hoja azul se dividió en cinco partes iguales.



b) Explica por qué funciona esta técnica. ______

______

______

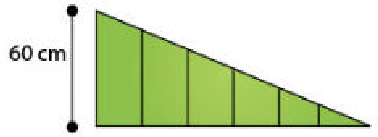
______

c) Señalen, sin medir con regla, el punto M, de modo que la razón del segmento $\overline{AM}$ respecto al segmento $\overline{MB}$ sea $\frac{3}{2}$.

Una pista

¿En cuántas partes iguales hay que dividir el segmento?

3. El dibujo de la derecha representa un pedazo de reja. Los barrotes son paralelos y equidistantes.



a) ¿Cuánto mide el barrote más pequeño? ______

b) Justifica tu respuesta. ______

______

Una pista

Con el teorema de Tales es posible saber que en la figura hay varios triángulos semejantes. Cuando dos de ellos son semejantes y se conoce las medidas de uno y la razón de semejanza, se deducen las medidas del otro.

- Comenta tus respuestas y procedimientos con tus compañeros. Resuman, en su cuaderno y de manera grupal, las utilidades que tiene el teorema de Tales.

Secuencia 3 / lección 48

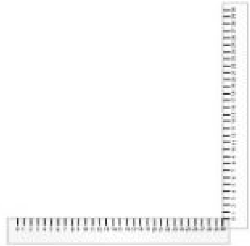
Triángulos, hilo, palillos y algo más I

CONTENIDO Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

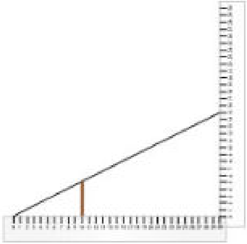
1. **Trabaja en equipo. Para las actividades de esta lección y la siguiente necesitarán dos reglas de 30 cm (pueden elaborarlas con cartulina), un hilo resistente y palillos (pueden sustituir estos últimos por popotes delgados o tiras de cartón), que midan lo siguiente.**

A: 5 cm	B: 6 cm	C: 8 cm	D: 10 cm
E: 12 cm	F: 15 cm	G: 16 cm	H: 20 cm

Coloquen las reglas sobre una superficie plana, como se indica en la primera imagen de la derecha. Es importante que el número 30 de la regla horizontal coincida con el 0 de la vertical. Procuren que las reglas no se muevan; si es posible, péguenlas a la superficie con cinta adhesiva.

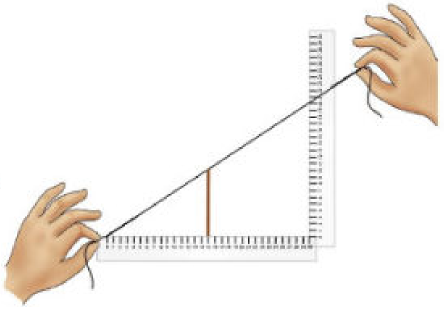


Para efectuar las actividades, sujetarán un palillo en posición vertical, según se indique. También colocarán el hilo para formar un triángulo con las reglas: desde el 0 de la regla horizontal, pasando por el extremo superior del palillo, hasta tocar algún punto de la regla vertical.



a) Coloquen el palillo A en la marca de 10 cm de la regla horizontal, como en la segunda figura de la derecha.

Al colocar el hilo, ¿a qué número llega éste en la regla vertical? ____________



b) Coloquen ahora el mismo palillo en la marca de 15 cm de la regla horizontal.

¿A qué número llegó el hilo en la regla vertical? __________

c) ¿A qué número llega el hilo al colocar el mismo palillo en la marca de 20 cm? __________

d) ¿Qué palillo se colocó en la marca de 15 cm si el hilo llega a 20 cm en la regla horizontal? Para responder, considera la tercera figura. ____________________________________

2. **Hagan lo siguiente.**

a) Completen la tabla antes de colocar el palillo y el hilo junto a las reglas. Consideren, en todos los casos, el palillo D, de 10 cm.

Posición del palillo D en la regla horizontal	10 cm	12 cm	20 cm	25 cm
Predicción: ¿a qué punto llegará el hilo en la regla vertical?				

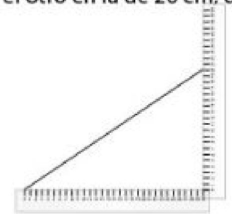
Una pista
Usa el teorema de Tales para determinar cómo son los segmentos.

b) Verifiquen sus respuestas usando las reglas, el hilo y el palillo. Si identifican algún error, averigüen qué lo ocasionó y corríjanlo.

- **Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros. Tengan en cuenta que las medidas que obtuvieron son siempre aproximaciones, pues es inevitable cometer pequeños errores de medición. Por tanto, acuerden, con el profesor, un margen de error aceptable.**

3. **Trabaja en equipo. Consideren que en los siguientes casos se debe colocar un extremo del hilo en la marca de 0 cm de la regla horizontal y el otro en la de 20 cm, de la regla vertical.**

a) Completen la tabla antes de usar las reglas.



Colocar un palillo en la regla horizontal a…	7.5 cm	9 cm	15 cm	12 cm	24 cm
Predicción: ¿qué palillo debe colocarse para que su extremo superior toque el hilo?					

b) Verifiquen sus respuestas colocando los palillos en la posición que predijeron. Noten que, por medio de esta actividad, se comprueba el teorema de Tales.

» ¿Cuáles son las paralelas? ____________________________________

» Mencionen qué segmentos son proporcionales.

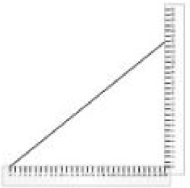
- **Comenten, con el grupo, la manera en que completaron la tabla antes de usar el material. Si hay diferencias entre las predicciones y su comprobación, expliquen por qué; averigüen si es un error de cálculo o de medición.**

Triángulos, hilo, palillos y algo más II

CONTENIDO: Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales

1. Trabaja en pareja. Consideren que el hilo debe colocarse desde la marca de 0 cm de la regla horizontal hasta la de 25 cm de la regla vertical.
   a) Averigüen, sin usar su material, en qué punto se debe colocar el palillo de 5 cm para que su extremo superior toque el hilo.

   ______



   b) Completen la tabla, sin usar todavía el material.

Palillo	A: 5 cm	D: 10 cm	F: 15 cm	H: 20 cm
Predicción: lugar de la regla horizontal donde se debe colocar el palillo para que su extremo superior toque el hilo				

   c) Verifiquen sus resultados usando el material.

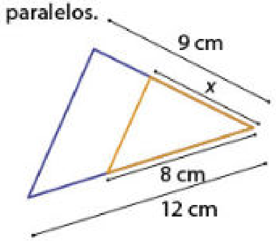
2. Coloquen los palillos que se indican sobre los puntos señalados y deduzcan a qué lugar de la regla vertical llegará el hilo. Predigan los resultados antes de usar su material.

Palillo	Punto de la regla horizontal donde debe colocarse	Predicción: punto de la regla vertical al que llegará el hilo
A: 5 cm	6 cm	
B: 6 cm	8 cm	
C: 8 cm	10 cm	
F: 15 cm	15 cm	
H: 20 cm	25 cm	

- Comenten cómo predijeron los resultados. Luego lean lo siguiente con ayuda del profesor.

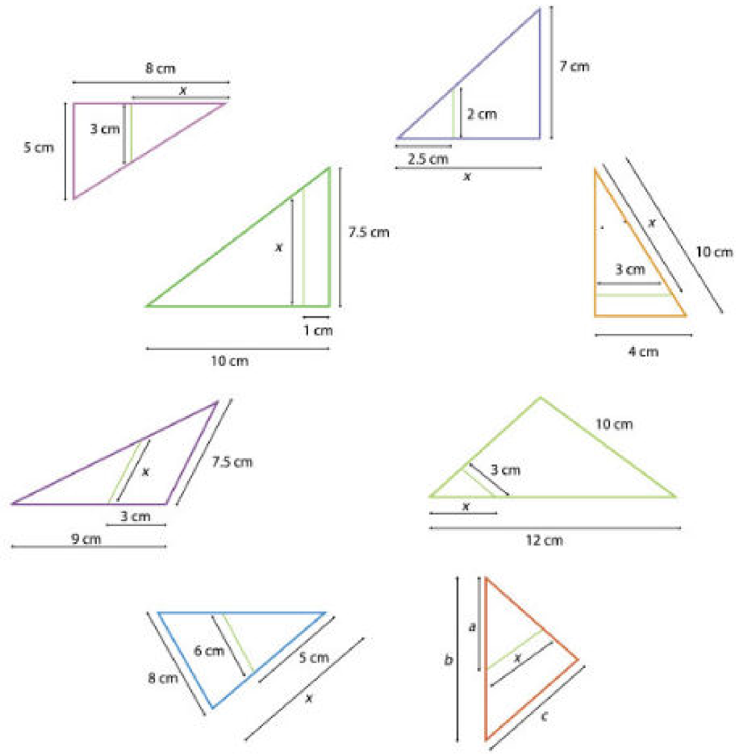
Las reglas y el hilo forman un triángulo; el palillo siempre es paralelo a uno de sus lados y forma un triángulo semejante. Se dice que dos triángulos colocados de esta manera están en "posición de Tales". En ese caso, es posible calcular datos desconocidos a partir de los que se conocen aplicando la proporcionalidad de segmentos.

3. Calcula el valor de x en la siguiente figura. Ten en cuenta que los lados más cortos de cada triángulo son paralelos.



- Compara tu resultado con el de tus compañeros; si hay diferencias, identifiquen el error y corrijan lo necesario. Comenten si alguien usó regla de tres y expliquen por qué es útil para resolver este tipo de problemas.

4. Calcula el valor de x en cada caso. Utiliza los segmentos paralelos como apoyo.



- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten la siguiente información y tracen en su cuaderno dos ejemplos que la ilustren.

Si una paralela a un lado de un triángulo corta los otros dos lados (o a su prolongación), se forma un triángulo semejante al original.

conect@mos

Aprende más acerca del teorema de Tales en

www.redir.mx/SCM3A-135

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las del grupo y valídenlas.

Convivimos

¿Te parece comprensible la información del recuadro? Si entendiste lo que allí se dice, explícalo a tus compañeros; en caso contrario, ten confianza para preguntar a tu profesor.

BLOQUE 3

Secuencia 4 / lección 50

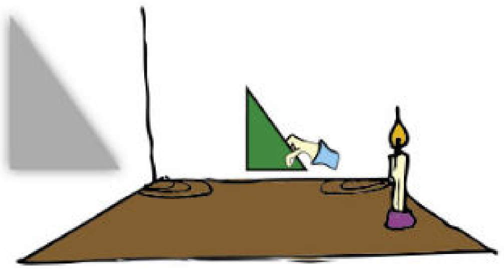
Sombras y otras proyecciones

CONTENIDO: Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Ya has estudiado transformaciones geométricas en las que a cada punto del plano se le asocia otro, como la simetría central y la axial. En esta lección estudiarás otro tipo de transformación que también relaciona puntos en el plano, pero mediante el cual se agrandan o se achican las figuras: la homotecia.

1. **Trabaja en equipo. Lleven a cabo esta actividad en la escuela; si no es posible, organícense para hacerla en la casa de algún integrante del equipo.**

   » Recorten un triángulo rectángulo de cartoncillo, cuyos catetos (lados que forman el ángulo recto) midan 8 cm y 16 cm, respectivamente.
   » En un lugar con poca luz, pongan una vela en un candelabro sobre una mesa. Enciéndanla y coloquen el triángulo entre ella y una pared, de modo que se proyecte su sombra. La vela debe estar a 1 m de la pared.



   » Hagan lo que se indica a continuación y contesten las preguntas.

Busquen con qué posición se proyecta en la pared una sombra con la misma forma del triángulo, es decir, sin que se deforme.

Mantengan el triángulo en dicha posición. En otras palabras, no dejen de proyectar una sombra semejante al triángulo de cartoncillo.

a) ¿Qué debe hacerse para que el tamaño del triángulo proyectado aumente?

____

b) ¿Es posible obtener la proyección de un triángulo más pequeño que el de cartoncillo?

____

c) Verifiquen que la vela esté a 1 m de la pared. ¿A cuántos centímetros de la vela deben poner el triángulo de cartoncillo para que los lados del triángulo proyectado midan el doble de los del primero? ______________________________

Ya sabemos...

En los triángulos semejantes sus lados correspondientes son proporcionales; por tanto, conservan la misma forma, aunque cambien sus medidas.

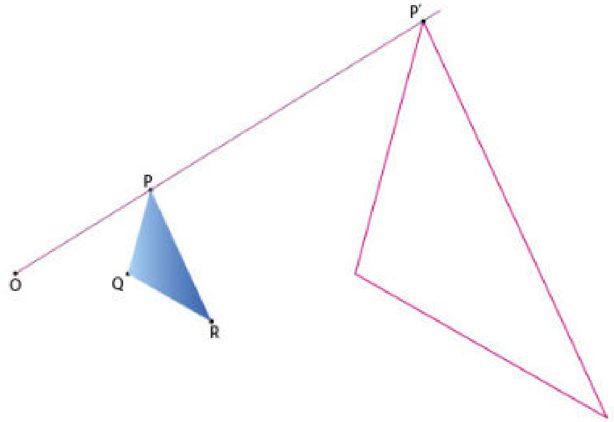
d) ¿A cuántos centímetros de la vela deben poner el triángulo de cartoncillo para que los lados del triángulo proyectado midan el triple de los del primero?

____

2. **Ahora conocerán una explicación matemática al fenómeno anterior. Consideren que la vela corresponde al punto O, y que los rayos de luz de la vela viajan en linea recta, como la que pasa por OP.**

a) Hagan lo siguiente para encontrar los puntos P′, Q′ y R′.

   » Noten que se trazó una recta que pasa por los puntos O y P, y el punto P′ se ubicó en ella de manera que $\overline{OP'}$ mida el triple de $\overline{OP}$.
   » Tracen la recta que pasa por O y Q. Ubiquen Q′ de manera que $\overline{OQ'}$ mida el triple de $\overline{OQ}$.
   » Hagan lo mismo para ubicar el punto R′.
   » Unan los puntos P′, Q′ y R′ para formar un triángulo. Éste se llama *triángulo homotético* de PQR con centro de homotecia O y razón 3 a 1.



b) Noten que los triángulos **PQR** y **P′Q′R′** parecen semejantes. ¿Esto es una casualidad? Para saberlo, consideren las siguientes parejas de triángulos.

OQP y OQ′P′   OQR y OQ′R′   OPR y OP′R′

   » ¿Por qué son semejantes los triángulos de cada pareja? ______________________________

   ____

   » ¿Cuántas veces son mayores los lados de P′Q′R′ que los de PQR? ______________

   » ¿Por qué los triángulos **PQR** y **P′Q′R′** son semejantes? ______________________________

   ____

* **Lean, con el grupo, lo siguiente. Después tracen en su cuaderno un triángulo ABC, designen un punto O fuera de él y tracen un triángulo A′B′C′ homotético al ABC con centro O y razón 2 a 1.**

Una homotecia de centro **O** y de razón *r* es una correspondencia que a cada punto **P** del plano le asocia un punto **P′**, de modo que $\overline{OP'} = r$ veces $\overline{OP}$.
La razón de homotecia es $r = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$.
Dos figuras homotéticas siempre son semejantes.

BLOQUE 3

Secuencia 4 / lección 51

Homotecias fraccionarias y negativas

CONTENIDO: Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

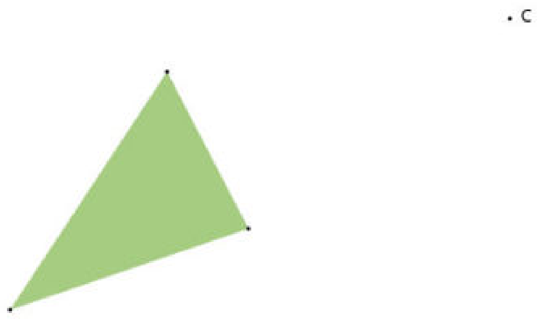
Una pista

Analiza la figura que obtuviste en la actividad 2 de la lección anterior. ¿Cómo están colocados los puntos O, P y P'? ¿Cuánto da como resultado la división de OP' entre OP?

1. **Trabaja en equipo. Tracen dos triángulos homotéticos al siguiente, con centro de homotecia C y las razones de homotecia que se indican.**

a) Razón de homotecia: $\frac{1}{2}$

b) Razón de homotecia: 0.75

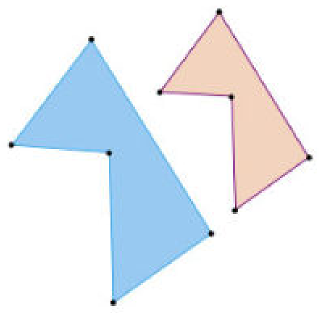


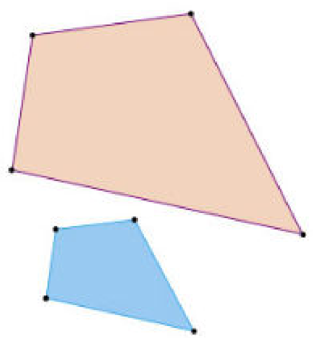
Una pista

En la lección anterior aprendiste que dos vértices correspondientes de figuras homotéticas y el centro de homotecia son colineales, es decir, están sobre una misma recta.

- **Comenten con sus compañeros de grupo la manera en que efectuaron la actividad anterior.**

2. **Encuentra el centro de homotecia de las siguientes parejas de figuras homotéticas. Considera que la figura azul es la original.**





a) Cuando la razón de homotecia es mayor a 1, ¿la figura homotética es mayor, menor o igual que la original? ____________

b) ¿Y si es menor a 1? ____________

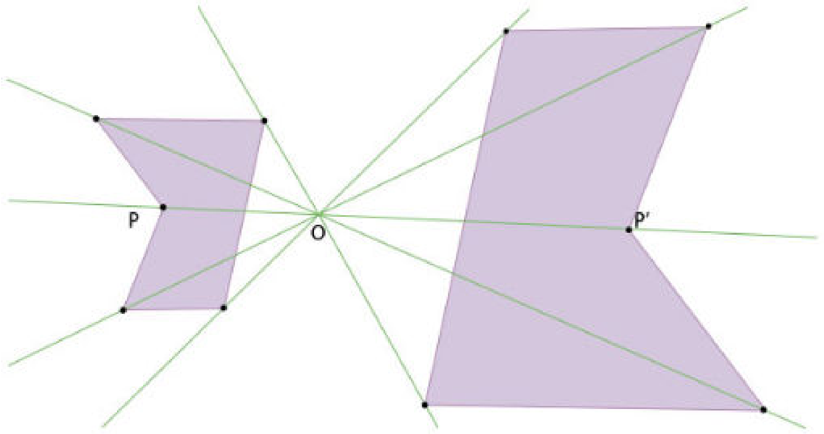
c) ¿Cuál es la razón de homotecia si la figura homotética y la original son iguales?

____

d) Traza en tu cuaderno un triángulo ABC, designa un punto fuera de él como centro de homotecia y traza el triángulo homotético de **ABC** con razón de homotecia igual a 1. ¿Qué observas? ____________

____

3. Las siguientes figuras también son homotéticas.



a) ¿En qué se parecen? ____________

b) ¿En qué son diferentes? ____________

c) Fíjate en que **OP** y **OP'** tienen diferente orientación. En este caso, la razón de homotecia $\frac{OP'}{OP}$ es negativa y se dice que la homotecia es inversa. ¿Cuál es la razón de homotecia?

- **Lee, con el grupo, lo siguiente. Después tracen en su cuaderno dos figuras con homotecia directa y dos figuras con homotecia inversa . Anoten, en cada caso, la razón de homotecia (con su signo correspondiente).**

Cuando dos figuras homotéticas están situadas del mismo lado del centro de homotecia se dice que la homotecia es directa y la razón de homotecia es positiva. Si las figuras están colocadas en lados opuestos respecto al centro de homotecia, entonces se trata de una homotecia inversa y la razón de homotecia es negativa. En la figura anterior, la razón de homotecia es –2.

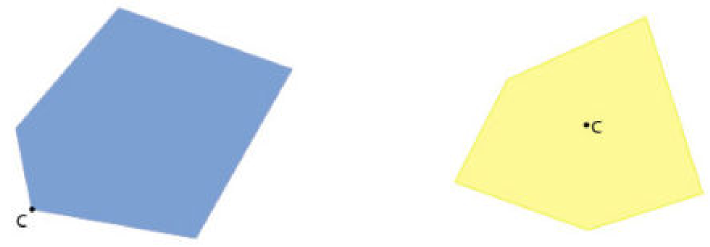
Secuencia 4 / lección 52

Cambiar el centro de homotecia

CONTENIDO Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Una pista
La figura homotética puede quedar dentro de la figura original.

1. Traza, en equipo, una figura homotética. En cada caso, la razón de homotecia debe ser $\frac{1}{2}$ y su centro, el señalado con la letra **C**.



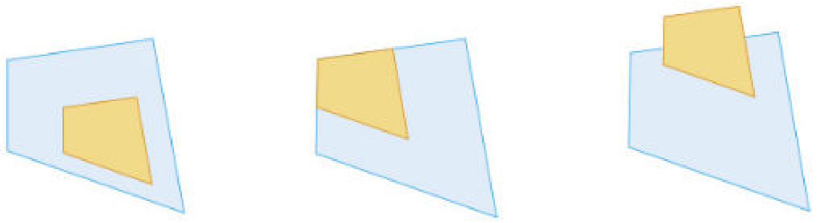
- Comparen sus figuras y procedimientos con los de sus compañeros. Discutan y resuman, entre todos, cómo cambia la posición de la figura homotética cuando el centro de homotecia…

   a) es uno de los vértices de la figura. ______

   b) está dentro de la figura. ______

Reflexionamos
¿Cómo podemos identificar si el centro de homotecia está dentro o fuera de la figura original?, ¿o si está en uno de sus vértices?

2. Trabaja en equipo. Las figuras de cada pareja son homotéticas. Localicen el centro de homotecia y nómbrenlo P.



3. Las siguientes parejas de figuras son semejantes, pero no todas son homotéticas. Identifiquen las que lo sean, ubiquen y marquen el centro de homotecia, y pongan una ✔ en el recuadro.

a) ¿Cómo identificaron las figuras que, además de ser semejantes, son homotéticas?

______

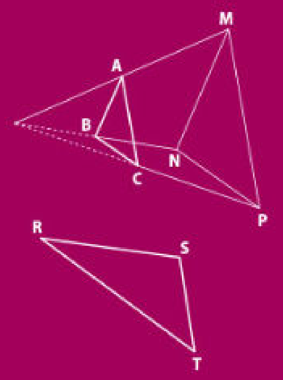
b) Anoten una ✔ en las características que correspondan a cada tipo de figuras.

Característica	Figuras homotéticas	Figuras semejantes que NO son homotéticas
Tienen lados correspondientes paralelos.		
Tienen lados correspondientes no paralelos.		✔
Tienen lados correspondientes proporcionales.		
Tienen ángulos correspondientes iguales.		
Las rectas que unen vértices correspondientes concurren en un punto.		

- Lean y comenten, con ayuda del profesor, la información del recuadro. Después hagan lo siguiente.
   a) Tracen en su cuaderno un par de figuras homotéticas.
   b) Tracen en su cuaderno un par de figuras semejantes, pero no homotéticas.
   c) Verifiquen que sus figuras, tanto las homotéticas como las semejantes pero no homotéticas, cumplan con lo que se menciona en el recuadro.

Dos figuras **homotéticas**, además de ser semejantes, tienen lados correspondientes paralelos. Asimismo, las rectas que unen vértices correspondientes concurren en un punto: el centro de homotecia. Cuando las figuras son semejantes, pero no homotéticas, no sucede lo anterior. Dicho en otras palabras, todas las figuras homotéticas son semejantes, pero no todas las figuras semejantes son homotéticas.

Por ejemplo, los triángulos MNP y ABC son homotéticos, pues tienen lados correspondientes paralelos, y las rectas que unen los vértices correspondientes concurren en un punto; en cambio, el triángulo RST sólo es semejante a los otros dos.



Más sobre homotecia

CONTENIDO: Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

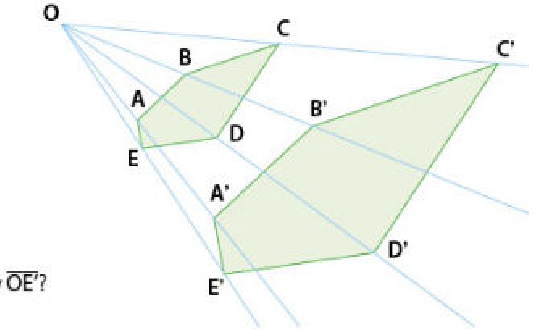
1. Traza en tu cuaderno un triángulo cuyos lados midan 6 cm, 9 cm y 12 cm. Elige un punto que funcione como centro de homotecia y traza lo siguiente.

a) Un triángulo homotético con razón de homotecia igual a -2.

b) Un triángulo homotético con razón de homotecia igual a $\frac{2}{5}$.

c) Un triángulo homotético con razón de homotecia igual a 0.8.

2. Se quiere que los lados del polígono A'B'C'D'E' midan dos veces y medio lo que los lados del polígono ABCDE.



a) ¿Cuánto pueden medir $\overline{OE}$ y $\overline{OE'}$?

_____ y _____

b) ¿Hay una solución o varias? ______________________________

____

c) Argumenta tu respuesta. ______________________________

____

3. Se desea trazar cuadrados homotéticos al siguiente.
Considera las siguientes razones de homotecia y anota A en el cuadrado homotético mayor; B en el que le sigue en tamaño; y así sucesivamente.

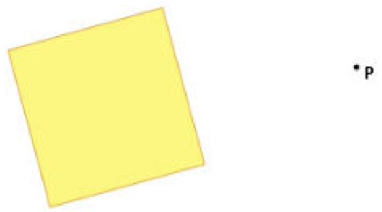
a) -3 _______

b) $-\frac{6}{5}$ _______

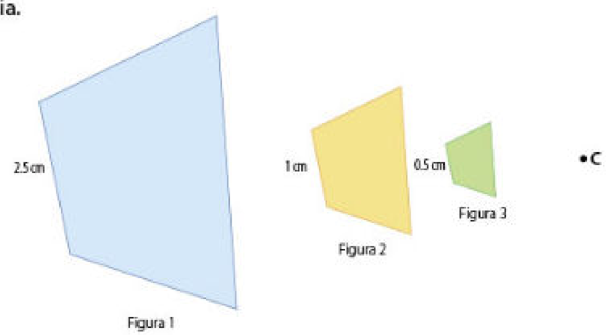
c) 0.9 _______

d) 1 _______

e) 1.8 _______



4. Analiza, en equipo, las siguientes figuras homotéticas. No olvides que C es el centro de homotecia.



a) ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 2 respecto a la 1? _______________

b) ¿Y la de la figura 3 respecto a la 2? _______________

c) ¿Cómo obtendrías la razón de homotecia de la figura 3 respecto a la 1 si ya conoces las razones que hallaste en los incisos a) y b)? _______________

5. Traza en tu cuaderno un cuadrado que mida 4 cm de lado. Elige un centro de homotecia exterior al cuadrado y traza cuadrados homotéticos con las siguientes razones.

a) Cuadrado 1: razón de homotecia $\frac{1}{2}$

b) Cuadrado 2: razón de homotecia $\frac{3}{4}$

c) Cuadrado 3: razón de homotecia $1\frac{1}{2}$

Ten en cuenta, en cada caso, qué cuadrado se considera en la siguiente tabla como el original y cuál, el homotético. Señala la razón de homotecia correspondiente.

Considerar como cuadrado original al	Considerar como cuadrado homotético al	Razón de homotecia
cuadrado 1	cuadrado 2	
cuadrado 1	cuadrado 3	
cuadrado 2	cuadrado 3	

* **Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Después lean la información del siguiente recuadro y respondan en su cuaderno.**

a) ¿Cuál es la razón de una composición de homotecias con el mismo centro si la primera razón es $\frac{1}{3}$ y la segunda, 3?

b) Comprueben su respuesta trazando…
  » un triángulo 1;
  » un triángulo 2 homotético al triángulo 1 con $r = \frac{1}{3}$;
  » un triángulo 3 homotético al triángulo 2 con $r = 3$ (con el mismo centro de homotecia de los triángulos 1 y 2).

La razón de una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.

conect@mos

Descarga la actividad de figuras homotéticas en www.redir.mx/SCM3A-143

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, el método que propusiste para trazar figuras homotéticas.

Una pista

Considera las medidas del cuadrado original y las razones de homotecia para que te des una idea sobre la medida de los lados de los cuadrados 1, 2 y 3. El análisis de las razones de homotecia también sirve para decidir a qué distancia conviene ubicar el centro de homotecia.

Secuencia 5 / lección 54

Curvas en el plano

CONTENIDO Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

¿Sabías que cuando las medidas de los lados de un rectángulo se duplican, el perímetro también se duplica, pero el área se cuadriplica? En esta secuencia estudiarás situaciones cuya representación gráfica no es una línea recta; en particular, interpretarás y construirás gráficas de funciones cuadráticas.

1. Considera que las siguientes relaciones entre las magnitudes que se indican se graficarán en el plano cartesiano. ¿La gráfica resultante será una línea recta?

Relación	¿Se obtendrá una línea recta?
a) Se graficarán todos los puntos cuya abscisa (x) sea la medida del lado de un cuadrado y la ordenada (y), el perímetro correspondiente.	
b) Se graficarán todos los puntos cuya abscisa (x) sea la medida del lado de un cuadrado y la ordenada (y), el área correspondiente.	
c) Se graficarán, sólo en el primer cuadrante, todos los puntos cuyas coordenadas (x, y), al multiplicarse, den siempre 12.	

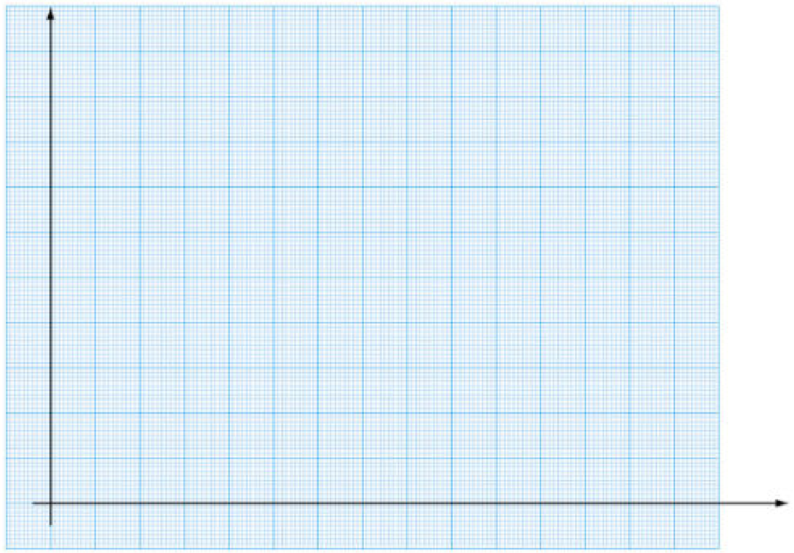
- Comenta, con tus compañeros, cómo obtuviste tus respuestas. Por ahora, no es necesario que lleguen a un acuerdo acerca del procedimiento para resolver la actividad.

2. Trabaja en equipo. Completen las siguientes tablas y grafiquen los puntos en el plano de la siguiente página. Para ello, consideren los valores en conjunto y decidan cuál escala les conviene más para graficar. Cuando hayan trazado las gráficas verifiquen, a partir de éstas, sus respuestas de los incisos a), b) y c) de la actividad anterior.

Lado del cuadrado (x)	Perímetro del cuadrado (y)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Lado del cuadrado (x)	Área del cuadrado (y)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Dos números positivos cuyo producto es 12	
Valor de x	Valor de y
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	



- Comparen sus resultados con los del resto del grupo. Asignen, para cada relación anterior, una de las siguientes expresiones algebraicas; cuando acuerden cuál corresponde a cada relación, verifiquen su respuesta sustituyendo x por los valores que anotaron en las tablas.

$y = \frac{12}{x}$ $\qquad$ $y = x^2$ $\qquad$ $y = 4x$

3. Completa la siguiente tabla, para la expresión $y = x^2 + 3x + 1$.

Valor de x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
Valor de y								

a) Utiliza papel milimétrico para representar los puntos de la tabla anterior. Después elabora la gráfica correspondiente uniendo esos puntos con una línea curva.

b) Explica por qué siempre que se eligen tres puntos de la gráfica de la expresión algebraica anterior, éstos no son colineales. ______________________

____

Ya sabemos...

Se dice que tres o más puntos son colineales si están alineados, es decir, si pertenecen a una misma línea recta.

- Comenta tus resultados con tus compañeros. En particular, expliquen su respuesta del inciso b). Después lean la siguiente información y compárenla con lo que trabajaron en esta lección.

Dependiendo del tipo de relación entre los números (x, y) de una expresión algebraica, la gráfica correspondiente puede ser una línea recta o una curva. Para cerciorarse de que una gráfica no es una línea recta basta demostrar que hay tres puntos de ella que no son colineales.

BLOQUE 3

Secuencia 5 / lección 55

Gráficas cuadráticas

CONTENIDO

Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

En contexto

En un partido de futbol, cuando el portero toma el balón puede despejarlo, es decir, golpearlo lejos y alto para iniciar un ataque de su equipo.

Ya sabemos...

Dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales si al aumentar una al doble, triple..., la cantidad correspondiente también aumenta el doble, el triple... Lo mismo sucede si una cantidad disminuye a la mitad, a su tercera parte, etcétera.

Una pista

La pelota se detiene cuando llega a su altura máxima.

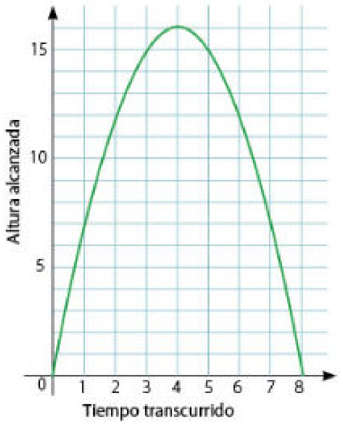
1. Un portero de un equipo de futbol ha despejado el balón. En la siguiente tabla se registran algunas alturas que alcanzó el balón y el tiempo en que lo hizo.

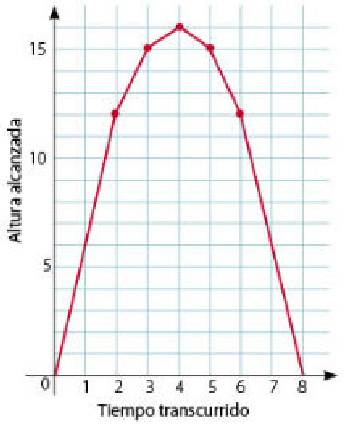
Tiempo (en segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (en metros)	0	7	12	15	16	15	12	7	0

a) ¿Las cantidades de la tabla son directamente proporcionales? ________

Explica en tu cuaderno por qué.

b) ¿Qué gráfica corresponde al problema?





Explica por qué la elegiste. ________________________

c) Marca con azul, en la gráfica que escogiste, el tramo donde la pelota vaya aumentando su velocidad, y con color café, aquél donde disminuya.

d) ¿Cuál fue la rapidez promedio durante los primeros dos segundos? ________

e) ¿Y entre los segundos 2 y 4? ________

f) Al alcanzar la altura máxima, ¿qué rapidez tenía la pelota? ________

g) ¿En qué momento fue más rápido la pelota? ________________

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten si para todos fue comprensible por qué la rapidez promedio durante los primeros dos segundos es mayor que la rapidez entre los segundos 2 y 4.**

2. Trabaja en equipo. Noten que una de las siguientes expresiones algebraicas está asociada al problema inicial.

a) Subrayen cuál es.

$y = (x - 4)^2 + 16$ $\quad$ $y = 7x$ $\quad$ $y = -(x - 4)^2 + 16$ $\quad$ $y = 6 + x$

b) Expliquen por qué eligieron esa expresión. ________________________

____

____

____

c) Usen la tabla de valores de la página anterior para verificar que la expresión que eligieron sea correcta. Sustituyan *x* por cualquier valor correspondiente al tiempo y hagan las operaciones indicadas para obtener la altura correspondiente.

3. Juan rodeará con una malla una parte de su terreno para formar un corral. Tiene 16 m de malla y quiere hacer el corral de forma rectangular.

a) ¿Qué medidas estimas que debe tener el corral para abarcar la máxima área posible? ________

b) Completa la tabla para obtener algunas medidas posibles para el corral.

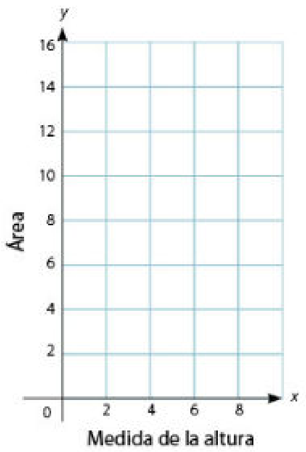
c) Localiza, en el plano cartesiano de abajo, los valores de la tabla y grafícalos.

Altura (cm)	Base (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm²)
1	7	16	7
2	6	16	
3		16	
	4	16	
5		16	
	2	16	
7		16	

d) Una posible medida para el corral es 5.5 cm de base y 2.5 cm de altura. Encuentra el punto correspondiente en la gráfica. ¿Cuál sería su área?

____

e) Usa la gráfica para hallar las medidas del corral que cubran una mayor área y compara este resultado con tu estimación del inciso a).



- **Compara tus resultados con los del resto del grupo. Discutan a qué punto de la gráfica corresponde el área máxima.**

conect@mos

Practica las gráficas de funciones cuadráticas en www.redir.mx/SCM3A-147

Resuelve los ejercicios. Al finalizar, explica en tu cuaderno cómo cambia la gráfica de una parábola al variar los parámetros de su ecuación.

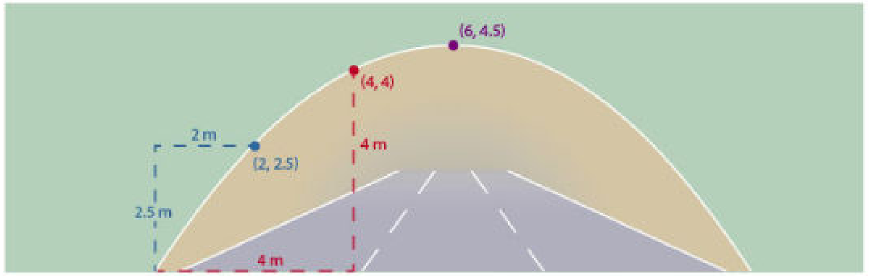
BLOQUE 3

Secuencia 5 / lección 56

En movimiento

CONTENIDO
Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

1. **Para conectar dos ciudades por carretera, se construyó un túnel con la forma que se muestra abajo. Este tipo de curvas se llaman *parábolas*.**



La altura del túnel sobre la carretera y la distancia horizontal a cualquiera de los extremos son cantidades que dependen una de otra: al variar la distancia al extremo izquierdo, la altura del túnel también cambia. Por ejemplo, el punto azul está a 2 m del extremo y a 2.5 m de altura, mientras que el punto rojo se encuentra a 4 m del extremo y a 4 m de altura.

a) De las siguientes expresiones, una relaciona la altura sobre la carretera (y) con la distancia al extremo del túnel (x). Subráyala.

» $y = \dfrac{-(x-6)^2}{8} + 4.5$ » $y = \dfrac{-(x+6)^2}{8} + 4.5$

» $y = \dfrac{(x-6)^2}{8} - 4.5$ » $y = \dfrac{(x+6)^2}{8} - 4.5$

b) Elabora, en tu cuaderno y para la expresión que hayas elegido, una tabla de valores en la que indiques la altura del túnel a 1 m, 3 m, 5 m, 6 m, 7 m, 9 m, 11 m y 12 m de distancia del extremo izquierdo. Después ubica los puntos en un plano cartesiano y únelos para trazar la gráfica del túnel.

» ¿Qué altura tiene el túnel a 5 m del extremo? ________________

» ¿A qué distancias del extremo izquierdo el túnel tiene una altura de 1.375 m?

________ y ______________

» En ese caso, ¿cuánto mide el túnel de ancho? ______________

» Si la caja de un tráiler mide 2 m de ancho y 4.25 m de altura, ¿ dicho vehículo puede circular por el carril central? ____________

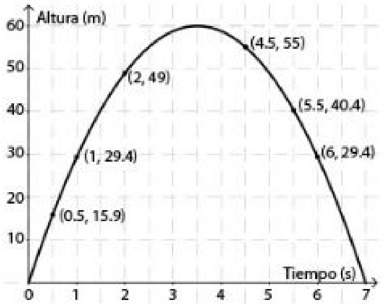
» Explica tu respuesta. ____

____

Una pista

Observa la gráfica e imagina cómo se vería un tráiler con las dimensiones indicadas pasando por el túnel.

2. **Los alumnos de tercero de secundaria construyeron un cohete en su clase de ciencias; lo lanzaron en el patio de la escuela y tomaron algunos datos para elaborar la gráfica de la derecha.**



a) Trabaja en equipo. Completen la tabla, donde se relacionan la altura que alcanzó el cohete y el tiempo transcurrido desde su lanzamiento.

Tiempo (s)	1.5	2.5	5	6.5	7
Altura (m)					

b) Subrayen la expresión algebraica que relaciona la altura (h) con el tiempo (t). Usen la gráfica o la tabla de valores para verificar si la expresión que subrayaron es correcta.

» $h = 4.9(t + 3.5)^2 - 60$ $h = 4.9(t + 3.5)^2 + 60$

» $h = -4.9(t - 3.5)^2 - 60$ $h = -4.9(t - 3.5)^2 + 60$

c) ¿Cuánto tardó el cohete en alcanzar su altura máxima? ________________

d) ¿Qué velocidad (vertical) tenía en ese momento? ________________

e) ¿Cuánto tiempo transcurrió desde que despegó hasta que cayó al suelo? ________

f) ¿En qué segundos el cohete tenía mayor rapidez? ______________

conect@mos

Descarga la actividad de funciones cuadráticas en

www.redir.mx/SCM3A-149

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

- **Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de las actividades 1 y 2.**

3. **Trabaja en equipo. Consideren las siguientes ecuaciones.**

$y = x^2$ $y = -2x^2$ $y = 0.5x^2$ $y = x^2 + 2$ $y = 3x^2 + 1$ $y = -0.1x^2$

a) Encuentren los valores de y cuando x vale −3, −2, −1, 0, 1, 2 y 3, y elaboren en su cuaderno la tabla que corresponda a cada expresión.

b) Tracen las gráficas correspondientes en sus cuadernos.

c) Adviertan que las expresiones tienen la forma $y = ax^2 + c$. Anoten en la tabla el valor de a y c para cada ecuación.

	$y = x^2$	$y = -2x^2$	$y = 0.5x^2$	$y = x^2 + 2$	$y = 3x^2 + 1$	$y = -0.1x^2$
a			0.5		3	
c					1	

- **Comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Comenten la siguiente información.**

Las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - b)^2 + c$ son parábolas.

Llenado de botellas

CONTENIDO Leo y construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Se vierte líquido en un recipiente irregular. ¿Cómo es la gráfica que relaciona la cantidad de líquido con la altura que alcanza dentro del recipiente? Un automóvil avanza durante un tiempo, se detiene y vuelve a avanzar a distinta velocidad. ¿Cómo es la gráfica que relaciona el tiempo con la distancia recorrida?

1. Resuelve la actividad en equipo. Necesitarán el siguiente material.

   » Un recipiente transparente en el que se pueda verter agua (procuren que los recipientes de cada equipo sean distintos, por ejemplo, una botella de refresco, un bote de jabón, etcétera)
   » Un embudo para introducir agua al recipiente
   » Un recipiente pequeño, como un bote de yogur, una taza o algo similar, y una cubeta para almacenar el agua que se necesite
   » Una regla graduada
   » Una tarjeta o una hoja de papel para anotar las mediciones

   a) Viertan varias veces el líquido del recipiente pequeño (bien lleno) en el recipiente grande, hasta casi llenarlo.

   b) Cada vez que viertan el líquido del recipiente pequeño, registren la altura que alcanza el agua en el grande.

   c) Hagan en su cuaderno la gráfica que relacione el número de recipientes pequeños vertidos (eje de las abscisas) con la altura, en centímetros, que alcance el líquido en el recipiente grande (eje de las ordenadas).

Reflexionamos

Para medir la altura se pone la regla como se muestra en la fotografía. ¿Por qué no se coloca pegada a la orilla del recipiente?

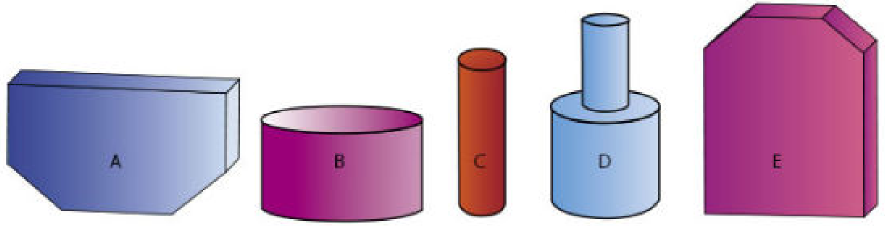
* Comparen, con ayuda del profesor, sus gráficas con las de sus compañeros. Analicen la relación entre la forma de cada gráfica y la del recipiente grande.

2. Si se graficara la relación "número de tazas vertidas-altura del agua" para los siguientes recipientes, ¿cuál sería una recta?

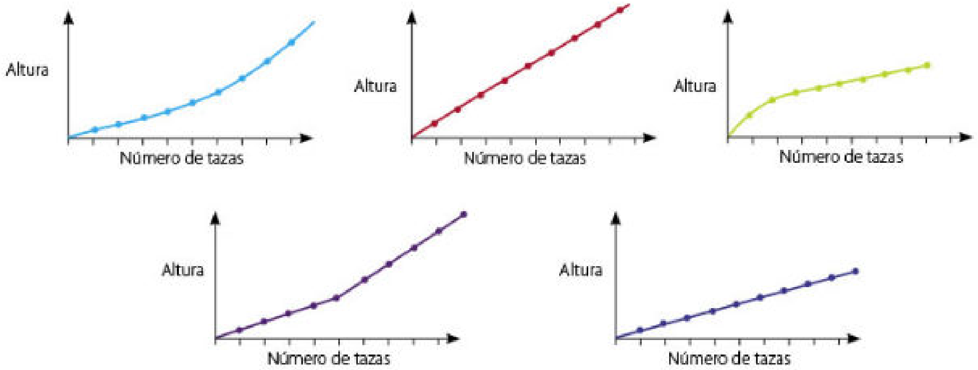
   La del recipiente F. ______ La del recipiente G. ______

   La del recipiente H. ______ Ninguna de las tres. ______

3. Trabaja en equipo. Cada recipiente se llenó vertiendo agua con una taza pequeña.



Para cada caso, se graficó la cantidad de tazas vertidas y la altura que alcanzó el líquido dentro del recipiente. Averigüen qué gráfica corresponde a cada recipiente.



* Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Expliquen cómo dedujeron a qué recipientes corresponden las gráficas con secciones curvas, y por qué deben ser curvas y no rectas.

4. Las siguientes tablas corresponden a dos recipientes en los que se vertió cierta cantidad de tazas de agua, y en los cuales se midió después la altura que alcanzó el líquido.

Recipiente 1	
Líquido (tazas)	Altura (cm)
1	4
2	8
3	12
4	15
5	17

Recipiente 2	
Líquido (tazas)	Altura (cm)
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Reúnete en equipo. Hagan en su cuaderno lo que se pide a continuación.

a) Grafiquen los datos de cada tabla.
b) Dibujen la forma que podría tener cada recipiente.

* Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Si dibujaron más de una forma de recipiente correcta, expliquen por qué ocurrió esto.

En contexto

Descubre cómo aparecen las matemáticas en muchos aspectos de lo cotidiano en *El secreto de los números*, de la Biblioteca de Aula.

Jouette, André, *El secreto de los números*, México, SEP-Ediciones Robinbook, serie Espejo de Urania, 2004.

BLOQUE 3

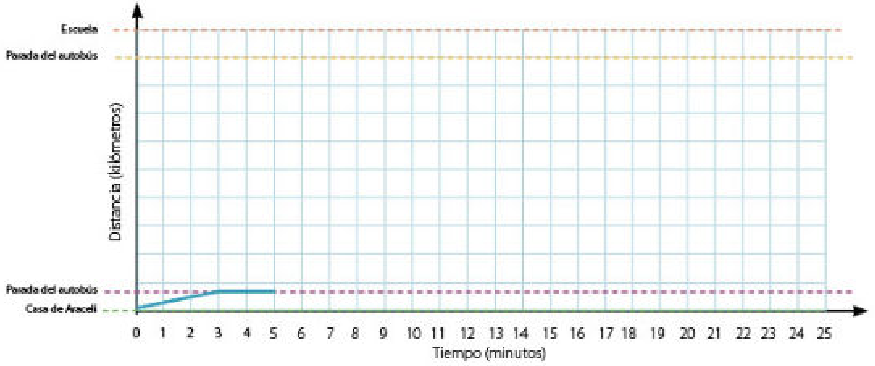
Secuencia 6 / lección 58

El movimiento en gráficas

CONTENIDO: Leo y construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

1. Para ir a su escuela, a 5 km de su casa, Araceli caminó hasta la parada del autobús y esperó a que éste llegara. El trayecto en autobús duró 15 min y, al bajar, ella caminó otros 5 min hasta la escuela.

La gráfica muestra la primera parte del recorrido de Araceli, desde que salió de su casa hasta que se subió al autobús.



a) ¿Cuánto tiempo tardó Araceli en caminar de su casa a la parada del autobús? ________

b) ¿Cuánto tiempo esperó el autobús? ________

c) Completa la gráfica del trayecto de Araceli.

d) ¿A qué distancia de la casa de Araceli está la parada del autobús? ________

e) ¿Qué distancia recorrió en autobús? ________

f) Si Araceli salió de su casa a las 6:55 de la mañana, ¿a qué hora llegó a la escuela?

____

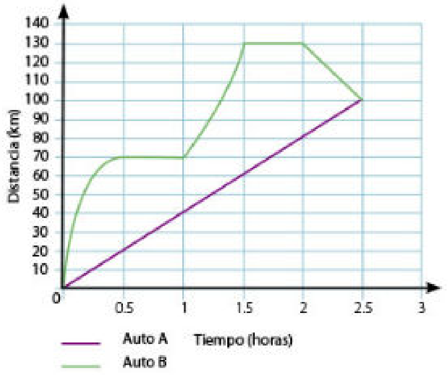
conect@mos

Observa más ejemplos de gráficas con secciones rectas y curvas en

www.redir.mx/SCM3A-152

Trabaja en equipo. Resuelvan algunas de las actividades propuestas y presenten su solución al resto del grupo.

2. Dos automóviles, A y B, parten juntos hacia la misma dirección. Las gráficas relacionan, para cada caso, el tiempo de recorrido con la distancia desde el punto de salida.



a) ¿En algún momento el auto A aumentó su velocidad? ________

Si tu respuesta es afirmativa, indica cuál fue ese momento. ________

b) ¿Qué auto se detuvo en dos ocasiones? ________ ¿Cuánto tiempo estuvo detenido en total? ________ ¿A qué distancia del origen se detuvo la primera vez? ________ ¿Y la segunda? ________

c) ¿Se encontraron los autos en algún punto? ________ ¿Cómo lo sabes? ________

____

d) ¿Qué auto se alejó más del punto de salida? ____ ¿A qué distancia llegó? ________

e) Uno de los autos mantuvo una velocidad constante. ¿Cuál fue esa velocidad? ________

f) ¿En qué tiempo aproximado el auto B estaba a 100 km del punto de partida? ________

g) ¿Cuál era la velocidad del auto B entre las horas 2 y 2.5 del recorrido? ________

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, comenten por qué, en la gráfica del automóvil B, la distancia disminuye en el último tramo.**

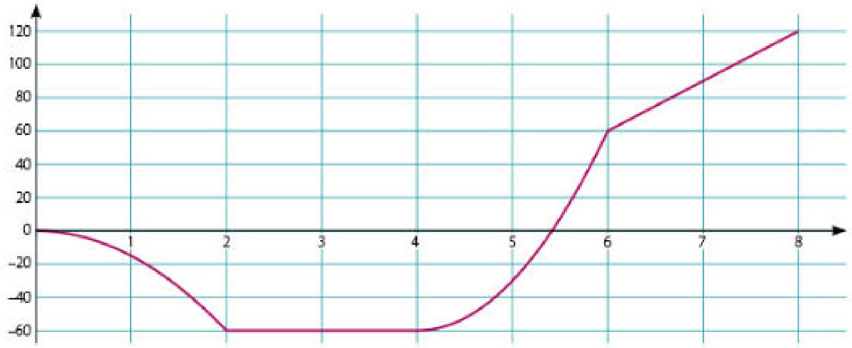
conect@mos

Descarga la actividad de secciones rectas y curvas en

www.redir.mx/SCM3A-153

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al finalizar, validen y comparen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas.

3. Inventa, con un compañero, una historia que corresponda a la siguiente gráfica.



____

____

____

Convivimos

Como has notado en esta secuencia, un problema se puede resolver por medio de una tabla, una gráfica o un diagrama. En equipo, identifiquen qué forma se les facilita más y cuál se les dificulta. Comenten cómo pueden superar sus dificultades.

4. Inventen en su cuaderno otra historia y una gráfica que se relacionen entre ellas.

- **Comparen sus historias y sus gráficas con las de sus compañeros. Comprueben que cada historia realmente corresponda a su gráfica.**

Dados y pelotas

CONTENIDO: Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

¿Cuál es la probabilidad de que un dado caiga en número par dos veces seguidas?, ¿y en número par y luego impar? ¿Cuál es la probabilidad de equivocarse en dos problemas que se resuelven al azar? En esta secuencia aprenderás a calcular la probabilidad de que sucedan dos eventos independientes.

1. **Responde en tu cuaderno y explica el procedimiento que usarías para resolver lo siguiente.**
   a) Si se lanza una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila-águila?
   b) Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 6-3?
   c) Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener número par en ambos?

- Comenta tus respuestas con tus compañeros. En particular, expliquen cómo calcularon la probabilidad del inciso c).

2. **Lee los problemas y responde en tu cuaderno.**
   a) En una caja hay 16 bolas: 8 rojas, 4 negras, 2 azules y 2 blancas. Se harán dos extracciones con remplazo, es decir, se sacará una bola, se regresará a la caja y se sacará otra.
      » ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?
      » ¿Y la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda, negra?

   b) En otra caja hay 30 bolas: 15 amarillas, 10 azules y 5 moradas. Se harán dos extracciones sin remplazo, es decir, para la segunda extracción habrá una bola menos en la urna.
      » ¿Cuál es la probabilidad de que la primera pelota sea amarilla y la segunda, azul?
      » ¿Y la probabilidad de que ambas sean moradas?

- Expliquen por qué no es útil anotar y contar uno por uno los casos favorables y los casos totales para resolver el problema 2. Comenten qué otros procedimientos encontraron.

Ya sabemos...

Para encontrar el resultado de una "fracción de fracción" basta multiplicar entre sí los numeradores y los denominadores. Por ejemplo:

$\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{7 \times 5} = \frac{8}{35}$

3. **En una caja hay pelotas azules, verdes y blancas. No se sabe cuántas hay de cada tipo, pero sí que la tercera parte del total de pelotas son azules y la mitad son verdes.**
   a) Si se hacen dos extracciones con remplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener una pelota azul en ambos casos? __________
   b) ¿Y de que la primera sea azul y la segunda, verde? __________
   c) Si en la caja hubiera seis pelotas en total, ¿las probabilidades que anotaste en los incisos a) y b) cambiarían? __________
   d) Y si hubiera 24 pelotas, ¿seguirían siendo las mismas probabilidades? __________

- Responde con tus compañeros las siguientes preguntas relacionadas con el problema 1c).

   a) Del total de casos favorables, ¿en qué parte el primer dado cae en número par? __________
   b) De los casos en los que el primer dado cae en número par, ¿qué parte cumple que el segundo dado es par? __________

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Una pista

La probabilidad no es $\frac{1}{3}$.

   c) Entonces, si en la mitad de la mitad de los resultados posibles los dos dados caen en número par, la probabilidad es __________.
   d) Comparen este procedimiento con los que utilizaron en los problemas anteriores. ¿Cuál les parece más fácil? ¿Con cuál se resuelve más rápido? __________

4. **Resuelve en equipo. En un examen de opción múltiple hay cuatro opciones de respuesta para cada pregunta, de las cuales sólo una es correcta. Completen la tabla.**

Preguntas contestadas al azar	1	2	3	4
Probabilidad de acertar todas				
Probabilidad de fallar al menos una				

   a) ¿Cómo calcularon las probabilidades de la fila verde? __________
   b) ¿Y las de la azul? __________

- Valida, con el grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten cómo se relacionan las probabilidades de las filas verde y azul, y expliquen la razón. Al finalizar, lean la siguiente información y úsenla para verificar sus respuestas de esta lección.

En los problemas anteriores, la probabilidad de que los dos eventos sucedan se puede obtener al multiplicar las probabilidades de ambos. Por ejemplo, en la actividad 3, la probabilidad de que ambas pelotas sean azules es $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

BLOQUE 3

Secuencia 7 / lección 60

Que sea pulsera, y que sea azul

CONTENIDO Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

1. **En una caja hay 20 pulseras y 40 relojes. De los 60 accesorios, 30 son azules; 15, rojos; y 15, verdes. Una persona saca un accesorio al azar. Responde lo siguiente.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el accesorio sea una pulsera? ¿Y de que sea un accesorio azul? ¿Y de que sea una pulsera azul? ____________

b) Arturo calculó la probabilidad de que el accesorio obtenido sea una pulsera azul de la siguiente manera: la tercera parte de los accesorios son pulseras, y de éstas, la mitad son azules. Entonces, la probabilidad es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$, es decir $\frac{1}{6}$.

Arturo cometió un error. Explica cuál es. ____________

____

____

c) Si hubiera ocho pulseras azules, ¿sería verdad que la probabilidad de sacar una pulsera azul es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$? ______

d) ¿Y si hubiera 10? ______

e) ¿Cuántos relojes rojos es indipensable que haya en la caja para que la probabilidad de obtener un reloj rojo coincida con la probabilidad de que el accesorio sea reloj multiplicada por la probabilidad de que el accesorio sea rojo? ______

Ya sabemos...

Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de que el otro suceda.

2. **En una caja hay dos bolas negras y cuatro blancas. Se harán dos extracciones. Responde lo siguiente.**

a) Calcula la probabilidad de que en la primera extracción la pelota sea blanca y en la segunda, negra. Ten en cuenta que las extracciones son con remplazo. ______

b) Calcula la probabilidad de que en la primera extracción la pelota sea blanca y en la segunda, negra. Ten en cuenta que las extracciones son sin remplazo. ______

c) En el segundo caso, la probabilidad no es el producto de la probabilidad de que sea blanca por la probabilidad de que sea negra. ¿Por qué ocurre esto? ____________

____

conect@mos

Resuelve más problemas de probabilidad en

www.redir.mx/SCM3A-156

Trabaja en equipo. Lean la información que se presenta y resuelvan las actividades propuestas. Al finalizar, comenten con el resto del grupo qué dificultades encontraron.

- Comenta, con el grupo, las respuestas de los dos problemas anteriores. Después lean y comenten la siguiente información.

En el primer problema, para que la probabilidad de sacar una pulsera azul coincida con la probabilidad de que sea una pulsera por la probabilidad de que sea azul, es necesario que la mitad de las pulseras sean azules, puesto que la mitad de los accesorios son azules, es decir, que los eventos "pulsera" y "azul" sean independientes.
Sólo cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de que sucedan ambos puede calcularse multiplicando las probabilidades de que suceda cada uno por separado.

3. **En una caja hay pelotas moradas y verdes. En las siguientes tablas se registra la posibilidad de obtener siempre moradas cuando se hacen varias extracciones. Una tabla corresponde a extracciones con remplazo y la otra, a extracciones sin remplazo. Identifica qué tabla corresponde a cada tipo de extracción. Puedes usar calculadora.**

Tabla 1

Número de extracciones	Probabilidad de que todas las pelotas sean moradas
1	0.2
2	0.037
3	0.0061
4	0.0009

Tabla 2

Número de extracciones	Probabilidad de que todas las pelotas sean moradas
1	0.2
2	0.04
3	0.008
4	0.0016

Una pista

En una de las tablas, al dividir la probabilidad de cada fila entre la de la fila anterior, se obtiene siempre el mismo resultado. En la otra tabla los cocientes varían. ¿Por qué ocurre esto?

4. Hay dos eventos independientes, A y B. La probabilidad de que suceda A es $\frac{1}{3}$, y la probabilidad de que sucedan ambos, A y B, es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda B? ____

5. Se tienen dos eventos independientes, C y D. Para el evento C hay seis resultados favorables de 30 posibles, y la probabilidad de obtener resultados favorables en ambos eventos es $\frac{1}{15}$. ¿Cuántos resultados favorables hay para D? ____

6. Supongamos que, en un hospital, la probabilidad de que nazca una niña es 60%, y la de que nazca un niño, 40%. Si nacen tres bebés, ¿cuál es la probabilidad de que sean sólo niñas? ____

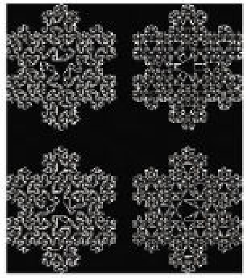
Reflexionamos

Se tienen dos urnas, 1 y 2. La tercera parte de las bolas de la urna 1 y la cuarta parte de las de la 3 son verdes. Si se elige una urna al azar, y de ella se toma una bola, también al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?

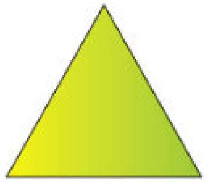
- Valida, con el grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten cómo determinaron a qué tipo de extracción corresponde cada tabla de la actividad 3.

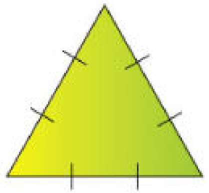
El infinito

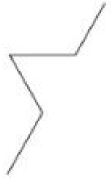
¿Te gustaría dibujar copos de nieve como éstos?



A continuación dibujarás uno. Sigue las instrucciones.







1. Primero traza en una hoja de papel un triángulo equilátero bastante grande (18 cm de lado es un buen tamaño).

2. Después divide en tres partes iguales cada uno de los lados.

3. En cada lado, sustituye el segmento central por dos segmentos con las mismas medidas que él, tal como se muestra.

¿Cuál es el perímetro del triángulo inicial?

¿Cuál es el perímetro de la figura resultante? Puedes usar fracciones o decimales para expresar el resultado.

Esto es sólo el inicio. Ahora repetirás los pasos 1 y 2 con cada uno de los 12 segmentos de la figura que resultó.

- Divide cada segmento en tres partes iguales.
- Sustituye el segmento central por un triángulo equilátero incompleto:
- Después de terminar con cada uno de los segmentos, repite nuevamente los pasos anteriores las veces que puedas.

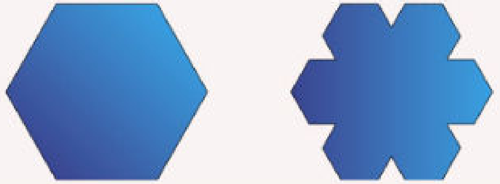
A la figura anterior se le llama *copo de nieve de Koch*, en honor a su inventor, Niels Fabian Helge von Koch, un matemático sueco que la dio a conocer en 1904. Cuando el proceso de dividir los lados continúa, el área de la figura aumenta pero nunca rebasa cierta cantidad, pues ésta ocupa una región limitada del plano. En cambio, su perímetro crece y rebasa cualquier límite, es decir, tiende al infinito. Este tipo de figuras se llaman *fractales*.

¿Quieres seguir dibujando fractales?

a) Traza en una hoja de cuaderno tamaño profesional un hexágono regular lo más grande posible.

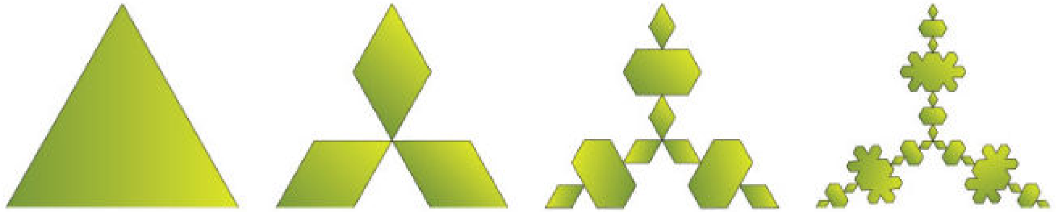
b) Divide en tres partes iguales cada segmento.

c) Sustituye el segmento central por dos segmentos del mismo tamaño, como se muestra en la figura inferior derecha. Repite este procedimiento tantas veces como sea posible.



Como posiblemente ya notaste, se trata de un procedimiento similar al de la actividad anterior, pero ahora el trazo central se hace hacia adentro de la figura. ¿Qué sucede ahora con el área de la figura? ¿Y con el perímetro?

Si efectúas los mismos trazos, pero ahora en un triángulo equilátero, obtendrás un fractal llamado *antiisla de Koch*.



Ahora crea un fractal propio. Puedes partir de la figura que tú quieras.

Para saber más acerca de fractales entra en
www.cienciateca.com/fractales.html
www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/principal.htm

Selecciona la opción correcta.

1. ¿Qué ecuación tiene sólo una solución?

   a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 + 2x - 1 = 0$

   c) $x^2 - x + 2 = 0$ d) $x^2 + x - 2 = 0$

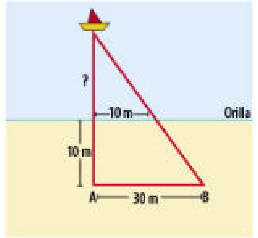
2. Para medir la distancia que hay entre un barco y la orilla del mar, se observó el primero desde los puntos A y B, y se tomaron las medidas indicadas en la figura. ¿A qué distancia está el barco de la orilla?

   a) 5 m

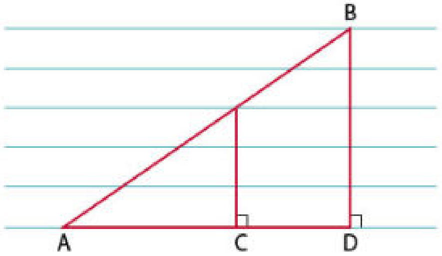
   b) 10 m

   c) 15 m

   d) 20 m



3. En la siguiente figura, las rectas horizontales son paralelas y equidistantes. ¿Qué afirmación es verdadera?



   a) $2\overline{AC} = \overline{CD}$ b) $\overline{AC} = 2\overline{CD}$ c) $2\overline{AC} = 3\overline{CD}$ d) $3\overline{AC} = 2\overline{CD}$

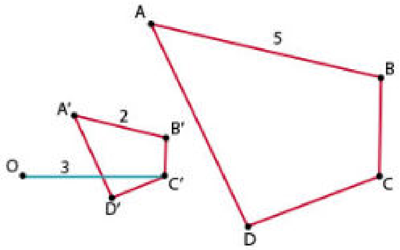
4. El cuadrilátero ABCD es homotético al cuadrilátero A'B'C'D', con centro de homotecia O. Si $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{A'B'} = 2$ cm y $\overline{OC'} = 3$ cm, ¿cuánto mide $\overline{OC}$?

   a) 7.3 cm

   b) 7.4 cm

   c) 7.5 cm

   d) 7.6 cm



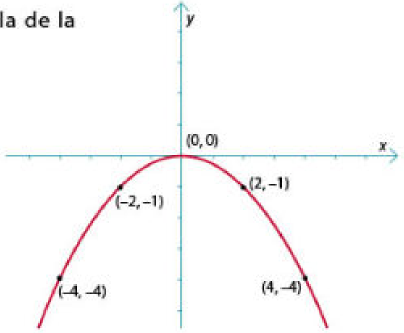
5. ¿Qué ecuación corresponde a la parábola de la derecha?

   a) $y = 4x^2$

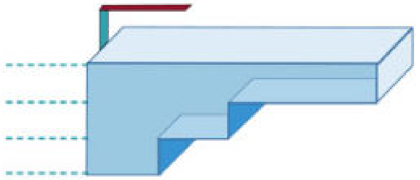
   b) $y = \frac{1}{4}x^2$

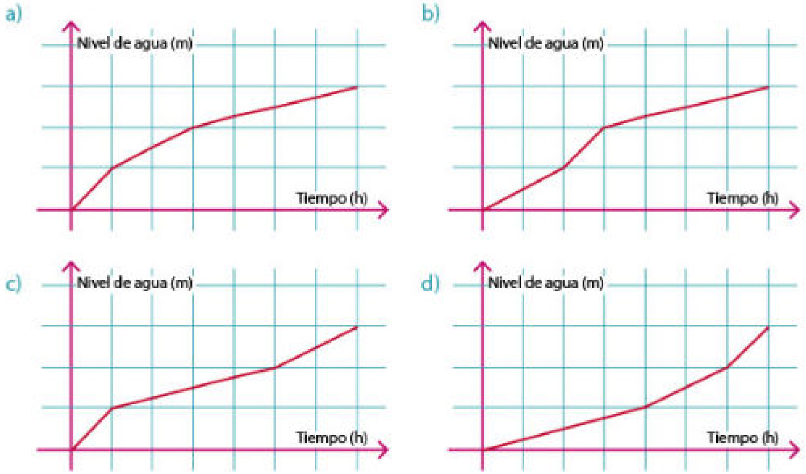
   c) $y = -4x^2$

   d) $y = -\frac{1}{4}x^2$



6. Para llenar una alberca de tres niveles, como la de la figura, se utilizó un flujo de agua constante. ¿Qué gráfica muestra la relación entre el nivel del agua y el tiempo transcurrido al llenarla?





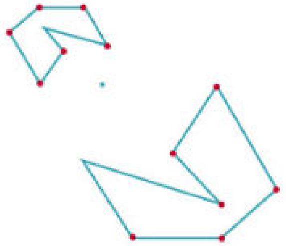
7. Para ganarle a Juan en Backgammon, Malaquías necesita que su último tiro sea doble seis, es decir, tirar dos dados y que ambos caigan en 6. ¿Qué probabilidad tiene de lograrlo?

   a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{36}$

8. ¿Qué puede afirmarse de la razón de homotecia de las figuras de la derecha?

   a) Que es positiva. b) Que es negativa.

   c) Que es mayor que 0 y menor que 1. d) Que es mayor que 1.

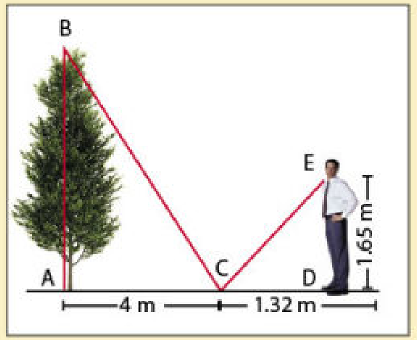


Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Esteban y su árbol

Hace unos años, Esteban plantó un árbol en su jardín. Desde entonces, cada año registra su crecimiento. Para medirlo utiliza un método ingenioso: pone un espejo en el suelo, a 4 m del pie del árbol, y se aleja en línea recta hasta ver la punta del árbol reflejada. Luego mide la distancia que hay entre su posición y el espejo y, mediante semejanza, deduce la altura del árbol.



Pregunta 1. ¿Cómo son los ángulos de incidencia y de reflexión que se forman a partir del espejo?

Pregunta 2. ¿Por qué los triángulos **ABC** y **DEC** de la figura son semejantes?

Pregunta 3. Si los ojos de Esteban están a 1.65 m del suelo, ¿cuál es la altura del árbol?

Pregunta 4. Explica si el método de Esteban funciona o no con un árbol chueco.

Pregunta 5. Escoge un objeto de altura inaccesible de tu entorno (un árbol, un edificio, un poste de luz...) y mídelo utilizando el método de Esteban.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Comunicar información matemática
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Palabras que cambian

La glotocronología es una disciplina que estudia la relación entre las lenguas a lo largo del tiempo. Fue desarrollada por el lingüista Morris Swadesh, quien partió de dos principios.
- Existe un vocabulario básico en cada lengua, y es relativamente estable.
- Las palabras básicas desaparecen de forma constante a una tasa de 14% cada milenio.

Pregunta 1. Dos lenguas emparentadas comparten hoy 86% de sus palabras básicas. De acuerdo con la teoría de Swadesh, ¿hace cuánto tiempo fueron la misma lengua?

Pregunta 2. La lengua indoeuropea, de la que proviene el español, tuvo su origen aproximadamente hace 4 000 años. Según la teoría de Swadesh, ¿qué porcentaje de palabras básicas del indoeuropeo ha sobrevivido en el español?

Pregunta 3. Imagina que inventas hoy una lengua con 50 palabras básicas. De acuerdo con la glotocronología, ¿cuántas sobrevivirán en 1 000 años?

Pregunta 4. ¿Cuál es la probabilidad de que una palabra básica sobreviva a un periodo de 1 000 años?

a) $\frac{7}{50}$ b) $\frac{14}{50}$ c) $\frac{36}{50}$ d) $\frac{43}{50}$

Pregunta 5. ¿La probabilidad de que una palabra básica sobreviva a un periodo de 4 000 años es mayor a 50%?

Autoevaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general.				
Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos para resolver problemas.				
Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales.				
Aplico la semejanza para trazar figuras homotéticas.				
Interpreto y elaboro gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.				
Interpreto y elaboro gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.				
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?

Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

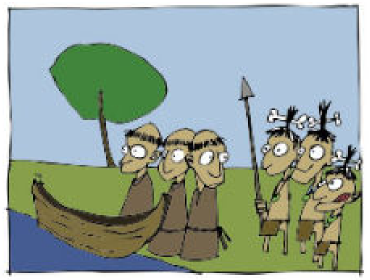
Y para terminar...

Pasar el río

Tres acertijos para pasar el río

1. Un señor se encuentra en la orilla de un río con un perro, una gallina y una bolsa de maíz. El señor desea cruzar el río con sus tres pertenencias; para lograrlo, dispone de una balsa en la que necesariamente debe ir él y sólo una de las tres cosas que desea llevar consigo. El problema consiste en pasar al perro, a la gallina y la bolsa de maíz del otro lado, pero cuidando que nunca se quede sola la gallina con el maíz, porque la gallina se lo comería, ni el perro con la gallina, ya que el perro se la comería. Escribe un instructivo detallado mediante el cual el señor pueda llevar en su balsa a la gallina, al perro y el maíz sin sufrir pérdida alguna.

2. Ocho excursionistas quieren cruzar un río, pero no hay puentes; sólo dos niños que juegan en un bote tan pequeño que únicamente podría transportar a un adulto o, máximo, a los dos niños juntos. Un niño y un adulto lo harían hundirse. ¿Cómo hacer para que crucen todos los excursionistas? Describe tu solución.



3. Tres misioneros y tres caníbales se encuentran en la orilla de un río que quieren cruzar. El problema consiste en que el río está repleto de pirañas y sólo disponen de una canoa de remos en la que caben dos pasajeros. Los tres misioneros son capaces de remar y los caníbales también. Sin embargo, se debe tener mucho cuidado al cruzar el río, pues si en algún momento, en alguna de las orillas, hay más caníbales que misioneros, los caníbales se comerían a los misioneros. ¿Existe algún procedimiento mediante el cual puedan cruzar los seis sin que algún misionero sea devorado? De ser así, escribe un instructivo que permita resolver la situación.

Respuestas (en cada caso se indica una respuesta posible).

Acertijo 1
- Pasa el señor con la gallina.
- Se regresa el señor.
- Pasa el señor con el perro.
- Se regresa el señor con la gallina.
- Pasa el señor con el maíz.
- Se regresa el señor.
- Pasa el señor con la gallina.

Acertijo 2
- Pasan los dos niños.
- Se regresa un niño.
- Pasa un adulto
- Se regresa el otro niño.

Se repiten estos pasos siete veces más.

Acertijo 3
- Pasa un misionero con un caníbal.
- Se regresa el misionero.
- Pasan dos caníbales.
- Se regresa un caníbal
- Pasan dos misioneros.
- Se regresa un misionero y un caníbal.
- Pasan dos misioneros.
- Se regresa un caníbal
- Pasan dos caníbales.
- Se regresa un caníbal
- Pasan dos caníbales.

BLOQUE 4

Aprendizajes esperados

- ✓ Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- ✓ Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- ✓ Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Sistemas de geolocalización

¿Cómo llegarías a un lugar al que viajas por primera vez? ¿Cómo sabrías qué sitios de interés hay en una zona que no conoces?

Con los sistemas de geolocalización, como el GPS (del inglés *Global Positioning System*), se ubican objetos en la superficie terrestre. Mediante ellos es posible conocer, por ejemplo, la ruta más corta entre dos lugares o el tiempo aproximado de un viaje o los sitios de interés cercanos a nuestra ubicación.

El GPS usa un sistema de satélites que mediante señales de radio envían su ubicación a un dispositivo móvil (por ejemplo, un teléfono celular). Con base en el tiempo que tardan en llegar las señales, el aparato calcula la distancia a cada satélite y usa esos datos para determinar su posición en la superficie terrestre.

1. En una hoja, traza los puntos A y B (que representan a dos satélites) separados por 10 cm. ¿Cómo encontrarías un punto C (que representa al dispositivo móvil) que esté a 8 cm de A y a 5 cm de B?
2. El GPS se creó en un proyecto militar. Investiga cómo funciona y cuál era su propósito original.
3. Además del GPS existen otros sistemas de geolocalización por satélites. Investiga cuáles son y quién los desarrolla.
4. Menciona algunas ventajas y desventajas de poder localizar a las personas en todo momento. Escribe tus conclusiones y debátelas con tus compañeros.

Para mirar un video sobre el funcionamiento del GPS entra a

www.redir.mx/SCM3A-167

Cuando dos o más conjuntos de datos tienen distribuciones similares, es posible identificar factores externos distintos con el mismo efecto sobre su tendencia. Muchas investigaciones científicas se basan en esto.

En este bloque conocerás nuevos parámetros estadísticos como el rango y la desviación media, y los usarás para interpretar y comparar conjuntos de datos.

BLOQUE 4

Secuencia 1 / lección 61

Figuras con palillos

CONTENIDO

Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Has estudiado sucesiones a las que les corresponden expresiones de primer grado, por ejemplo, $n + 4$ o $7n$. En esta secuencia trabajarás con sucesiones cuyas expresiones son de segundo grado. ¿Cómo se identifican? ¿Cómo se encuentra la expresión general que permite calcular el enésimo término?

En contexto

Conoce más sobre el uso de las variables y las incógnitas en el álgebra en *Una ventana a las incógnitas*, de la Biblioteca Escolar.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las incógnitas*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2002.

1. Trabaja con un compañero. Completen la tabla de cada sucesión. Pueden hacer las figuras con palillos. En la última columna de cada tabla encontrarán la expresión general del enésimo término.

a)

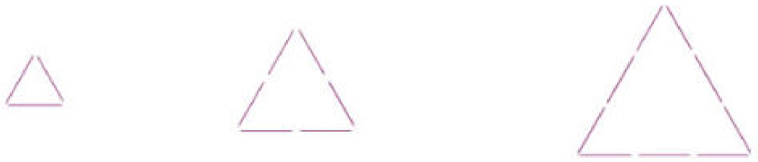


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	3	6						

b)

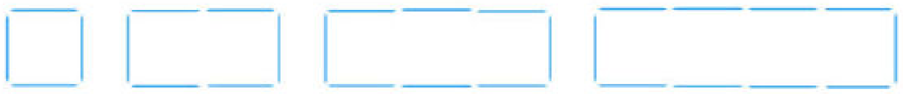


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	4			10				

c)

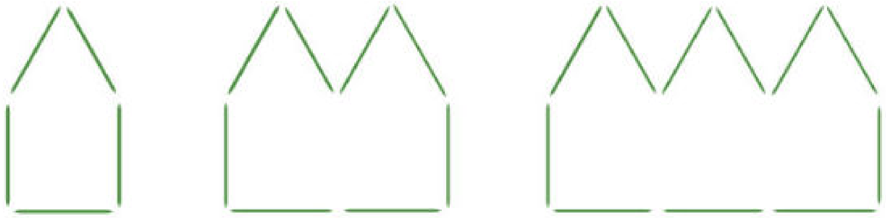


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	5		11					

d)

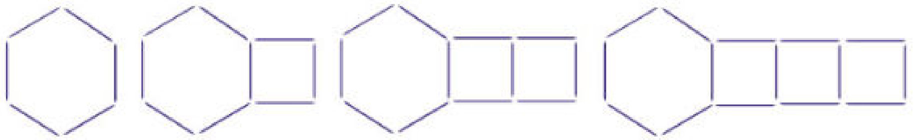


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	6					303		

e)

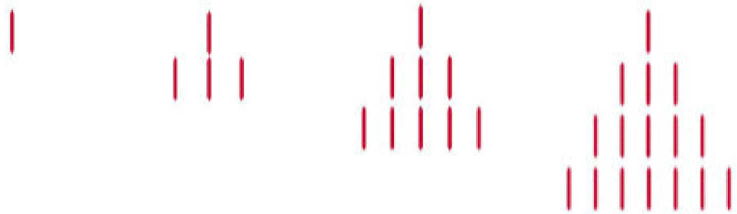


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	1	4				10 000		

f)

Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de palillos	4	5						

- Compara tus resultados y procedimientos con los de tus compañeros, así como las expresiones generales para calcular el enésimo término. Si éstas no están escritas de la misma manera, analicen si son equivalentes. En particular comenten las sucesiones de los incisos e) y f). Estudiarán sucesiones semejantes a éstas en las próximas lecciones.

BLOQUE 4

Secuencia 1 / lección 62

Sucesiones con figuras

CONTENIDO Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

1. Trabaja con un compañero. Completen la tabla de cada sucesión. Fíjense en que los primeros dos renglones corresponden al número de elementos de cada tipo, mientras que el último renglón corresponde a la cantidad total de elementos. En la última columna de cada tabla encontrarán la expresión general del enésimo término.

a) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

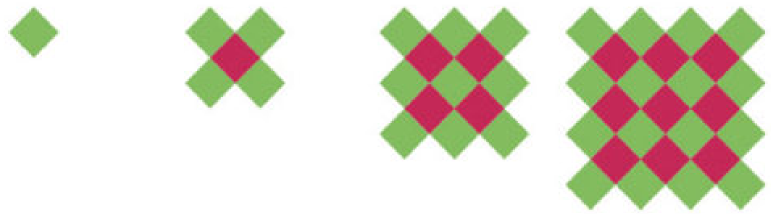


Figura	1	2	3	4	5	100	*n*
Número de cuadrados verdes	1			16			
Número de cuadrados rojos	0				16		
Número total de cuadrados	1						

b) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

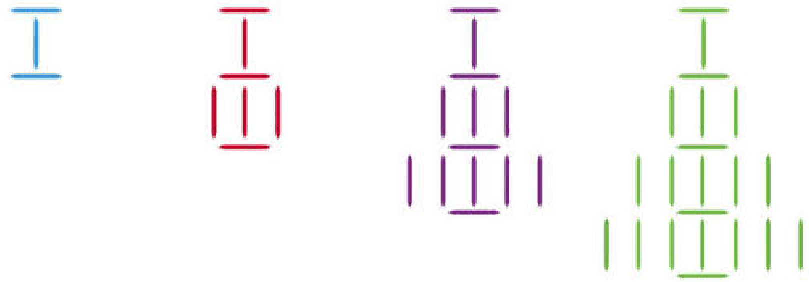


Figura	1	2	3	4	5	100	*n*
Número de segmentos horizontales	2			5		101	
Número de segmentos verticales	1				25	10000	
Número total de segmentos	3						

c) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

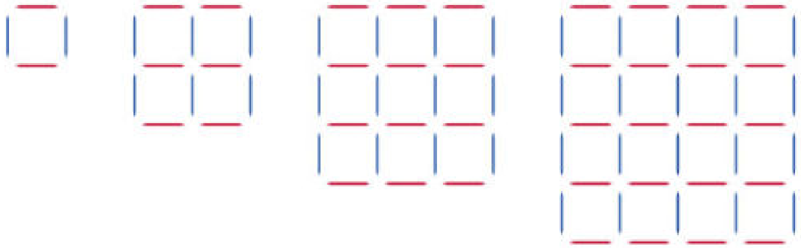


Figura	1	2	3	4	5	100	*n*
Número de segmentos rojos	2			20			
Número de segmentos azules	2				30		
Número total de segmentos	4						

d) Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

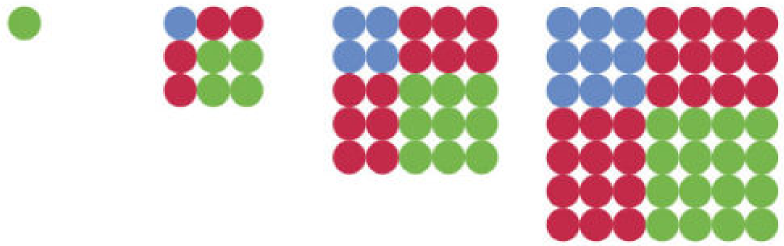


Figura	1	2	3	4	5	100	*n*
Número de círculos verdes	1						
Número de círculos azules	0				16		
Número de círculos rojos	0				40		
Número total de círculos	1						

- Con ayuda del profesor, comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Si en algún inciso obtuvieron expresiones generales algebraicas distintas para el enésimo término, verifiquen si son equivalentes; si no lo son, averigüen cuál es la correcta.

Sucesiones cuadráticas

CONTENIDO

Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

1. Completa la tabla. En algunos casos hay más de una respuesta correcta.

Sucesión	Expresión algebraica general para calcular el enésimo término	¿Aumenta o disminuye de manera constante?	¿Crece o decrece?
	$n^2 + 5$		Siempre crece.
		Sí.	Siempre decrece.
	$-3n^2$	No.	
		Sí.	Siempre crece.
	$n^2 - 5n$		Primero decrece y después crece.
	$-2n^2 + 20$	No.	
49, 46, 41, 34, 25, 14, 1, …		No.	
9, 16, 21, 24, 25, 24, 21, …	$-n^2 + 10n$		

- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de la tabla con las de tus compañeros. Mencionen en qué casos hay más de una respuesta correcta. Al terminar, lean la siguiente información y proporcionen más ejemplos de sucesiones de segundo grado.

Hay sucesiones numéricas cuya expresión algebraica es de **primer grado**, por ejemplo, la sucesión 7, 12, 17, 22, 27, … cuya expresión algebraica es $5n + 2$. Los términos que corresponden a este tipo de sucesiones varían de **manera constante**, es decir, la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma.

También hay sucesiones cuya expresión algebraica es de **segundo grado**, por ejemplo, la sucesión 3, 8, 15, 24, 35, … cuya expresión es $n^2 + 2n$. Este tipo de sucesiones, a diferencia de las de primer grado, **no cambian de manera constante**, es decir, la diferencia entre dos términos consecutivos varía.

2. Subraya la expresión algebraica correspondiente al enésimo término de la sucesión 0, −3, −8, −15, −24, …
   - » $n^2 - 1$ » $n^2 - n$ » $-n^2 + 1$ » $-n^2 + n$

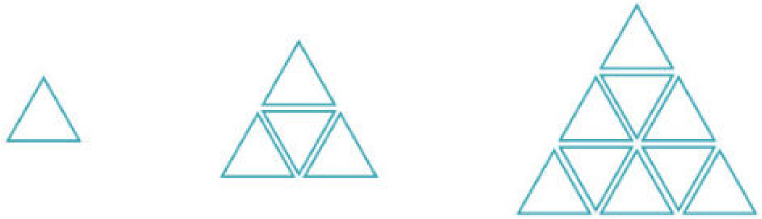
   a) ¿Qué número corresponde al lugar 100 de la sucesión? ________

   b) ¿Qué lugar de la sucesión corresponde al número −99? ________

   c) ¿El número −999 999 pertenece a la sucesión? ______ ¿Cómo lo sabes? ________

   ____

3. Encuentra la expresión algebraica para el número de triángulos de la figura n.



Expresión: ________________

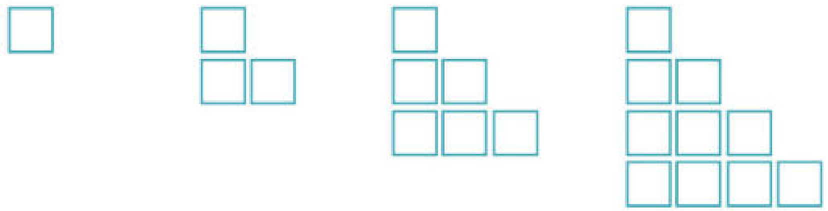
a) ¿Cuántos triángulos tendrá la figura 80 de la sucesión? ________

b) ¿Qué número de figura tendrá 10 000 triángulos? ________

c) ¿Alguna figura de la sucesión tendrá 600 triángulos? ________________

¿Cómo lo sabes? ________________________________

4. Trabaja en equipo. Hallen la expresión algebraica para el número de cuadrados de la figura n.



Expresión: ________________

conect@mos

Descarga la actividad de sucesiones cuadráticas en

www.redir.mx/SCM3A-173

Haz la actividad propuesta y responde las preguntas. Al finalizar, reúnete con algunos compañeros y resuman, entre todos, el método usado en la actividad para hallar la expresión algebraica de una sucesión cuadrática.

5. Anota, para cada caso, lo que se pide. Ten en cuenta que ninguna de las siguientes sucesiones puede ser alguna que haya aparecido antes en esta secuencia.

a) Los primeros cinco términos de una sucesión cuadrática que siempre crezca:

________________ Expresión algebraica del enésimo término: ________

b) Los primeros cinco términos de una sucesión cuadrática que siempre decrezca:

________________ Expresión algebraica del enésimo término: ________

c) Los primeros cinco términos de una sucesión cuadrática que primero crezca y después decrezca: ________________ Expresión algebraica del enésimo término: ________

BLOQUE 4

Secuencia 2/ lección 64

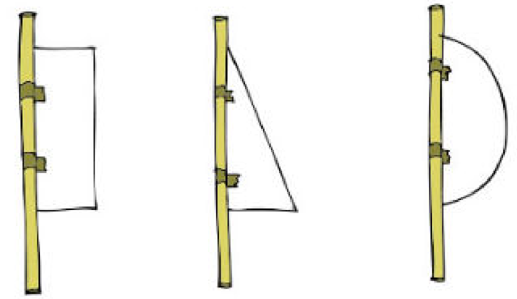
Girar una figura produce otra figura

CONTENIDO
Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos

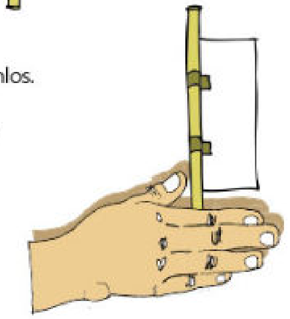
Los conos y los cilindros tienen características en común; una de ellas es que pueden generarse al girar una figura geométrica. ¿Qué figura debes girar para generar un cilindro? ¿Y un cono? Dado que tienen una cara curva, trazar plantillas para construir cilindros y conos no es fácil, pero al estudiar estas lecciones aprenderás a hacerlo.

1. Trabaja en equipo. Tracen en cartulina un rectángulo de 12 cm × 5 cm; un triángulo rectángulo cuyos lados midan 9 cm, 12 cm y 15 cm; y un semicírculo de 8 cm de radio. Recorten las figuras.

Peguen cada figura en un popote o en un palo pequeño, como se muestra.



Coloquen entre sus manos los popotes, uno por uno, y gírenlos.



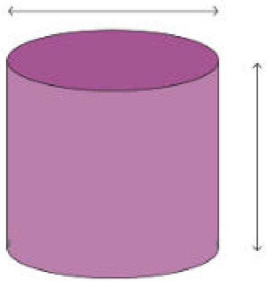
a) ¿Qué cuerpo geométrico se genera al girar el triángulo?

____

b) ¿Y al girar el rectángulo? ______________

c) ¿Y al girar el semicírculo? ______________

d) Anoten junto a las flechas las medidas del cilindro que se genera al girar el rectángulo. Consideren que lo pegaron al popote por el lado mayor.

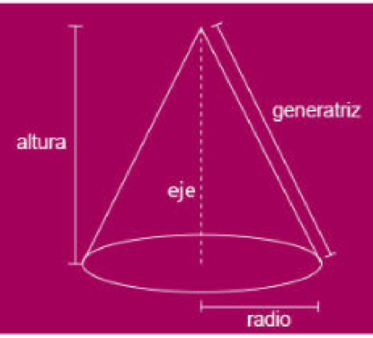


Reflexionamos

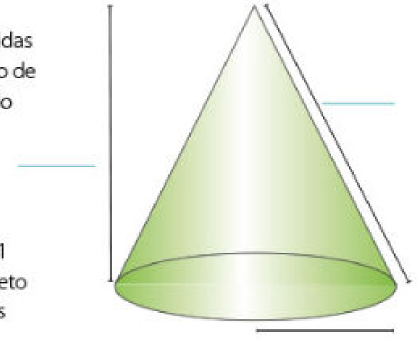
Otra manera de generar un cilindro es con un círculo. ¿Qué movimiento (simetría, traslación o rotación) debes aplicar al círculo para generar el cilindro?

2. Lee, en equipo, la siguiente información. Después hagan lo que se indica.

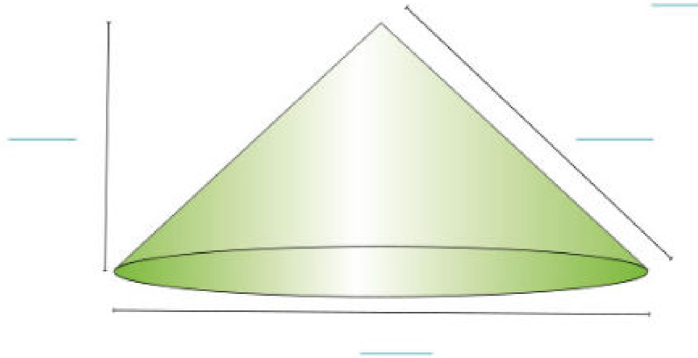
Al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos, la hipotenusa genera un cono recto. El eje sobre el cual giró el triángulo se nombra eje del cono, y coincide con su altura. La hipotenusa que genera el cono se llama **generatriz**.



a) Anoten en la figura de la derecha las medidas del cono que se genera al girar el triángulo de cartulina que elaboraron. Recuerden que lo pegaron al popote por el cateto mayor.



b) Imaginen que el triángulo de la actividad 1 se girará tomando como eje de giro el cateto más corto. Anoten en la figura de abajo las medidas del nuevo cono que se genera.



Reflexionamos

La siguiente figura recibe el nombre de toro.

¿Cómo puede generarse un toro a partir de un círculo?

- **Con ayuda del profesor, comparen sus resultados con los de sus compañeros. Si algunas medidas no coinciden, analicen quién tiene razón y corrijan lo necesario. Después, lean lo siguiente y hagan lo que se indica.**

Los cuerpos geométricos que se generan al girar una figura geométrica sobre un eje reciben el nombre de **cuerpos de revolución.** Estos son diferentes a los poliedros porque tienen al menos una cara curva y pueden no tener caras planas.

» Dibujen, en su cuaderno y a partir de la información anterior, tres cuerpos de revolución. Indiquen cuántas caras curvas y cuántas caras planas tiene cada uno.

BLOQUE 4

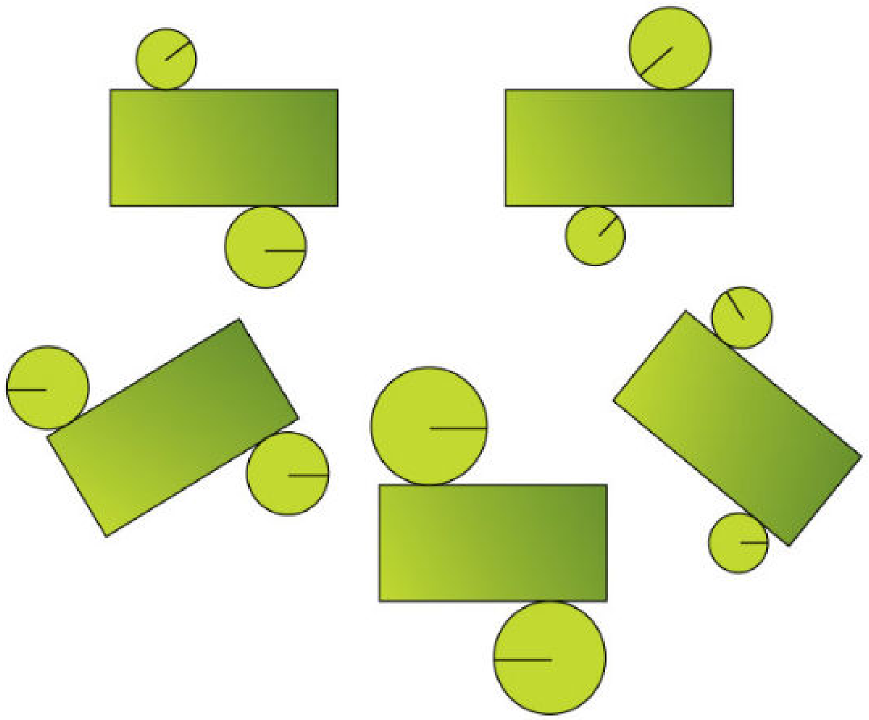
Secuencia 2 / lección 65

¿Cómo se hace un cilindro?

CONTENIDO

Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos

1. **Marca, de los siguientes desarrollos planos, el que sirva para formar un cilindro. Explica en tu cuaderno por qué los demás no sirven. Si no estás seguro de tu respuesta, calca el desarrollo plano que consideres correcto y recórtalo para construir el cilindro.**



- **Revisa, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Contesten lo siguiente.**

¿Qué características debe tener un desarrollo plano para que, a partir de éste, se pueda elaborar un cilindro? ______________________

____

conect@mos

Aprende más acerca del cilindro y el cono en

www.redir.mx/SCM3A-176

Lee la información y efectúa las actividades propuestas. Al finalizar, haz en tu cuaderno un mapa conceptual con las principales características del cilindro y otro del cono.

Ya sabemos...

El perímetro de un círculo se calcula con la fórmula $P = \pi d$ o, lo que es lo mismo, $P = 2\pi r$, donde d es el diámetro y r es el radio del círculo.

2. **Lleva a cabo, en equipo, lo siguiente. Consideren 3.14 como valor de π. Elaboren una figura por cada integrante del equipo.**

a) Tracen una plantilla para elaborar un cilindro con las siguientes medidas.

Altura del cilindro: 6 cm   Perímetro de la base: 15 cm

b) Recorten y peguen la plantilla para formar el cilindro.

c) Comparen su cilindro con el de sus compañeros de equipo. Verifiquen que la altura mida 6 cm y el perímetro de la base, 15 cm.

- **Analicen, con ayuda del profesor, los procedimientos que utilizaron para trazar la plantilla. Luego contesten lo siguiente.**

a) ¿Cuánto mide el rectángulo con el que se forma la cara curva del cilindro?

Largo: ____________   Ancho: ____________

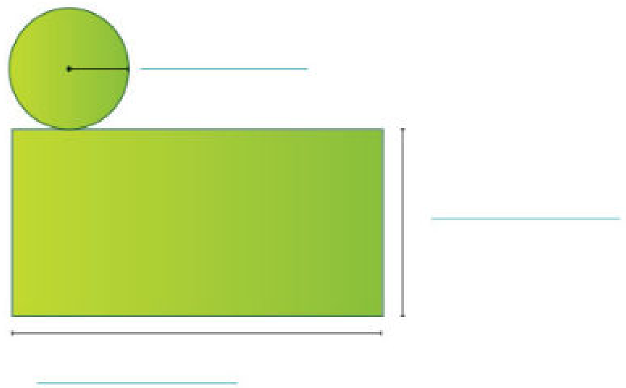
b) De las medidas anteriores, ¿cuál coincide con la altura del cilindro? ____________

c) ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias que trazaron? ____________

d) ¿Cómo calcularon la medida del radio? ____________

____

e) Anoten, en el siguiente dibujo, las medidas que utilizaron para elaborar el cilindro.



f) Lean la siguiente información y respondan.

La cara lateral de un cilindro es un rectángulo cuyas medidas corresponden a la altura del cuerpo y al perímetro de su base.

g) ¿Que medidas tiene la cara lateral de un cilindro de 10 cm de altura y 5 cm de radio?

____

h) Consigue una lata con forma cilíndrica. Toma las medidas necesarias y calcula las dimensiones de su cara lateral.

Largo del rectángulo: ____________   Ancho del rectángulo: ____________

BLOQUE 4

Secuencia 2 / lección 66

¿Cómo se construye un cono?

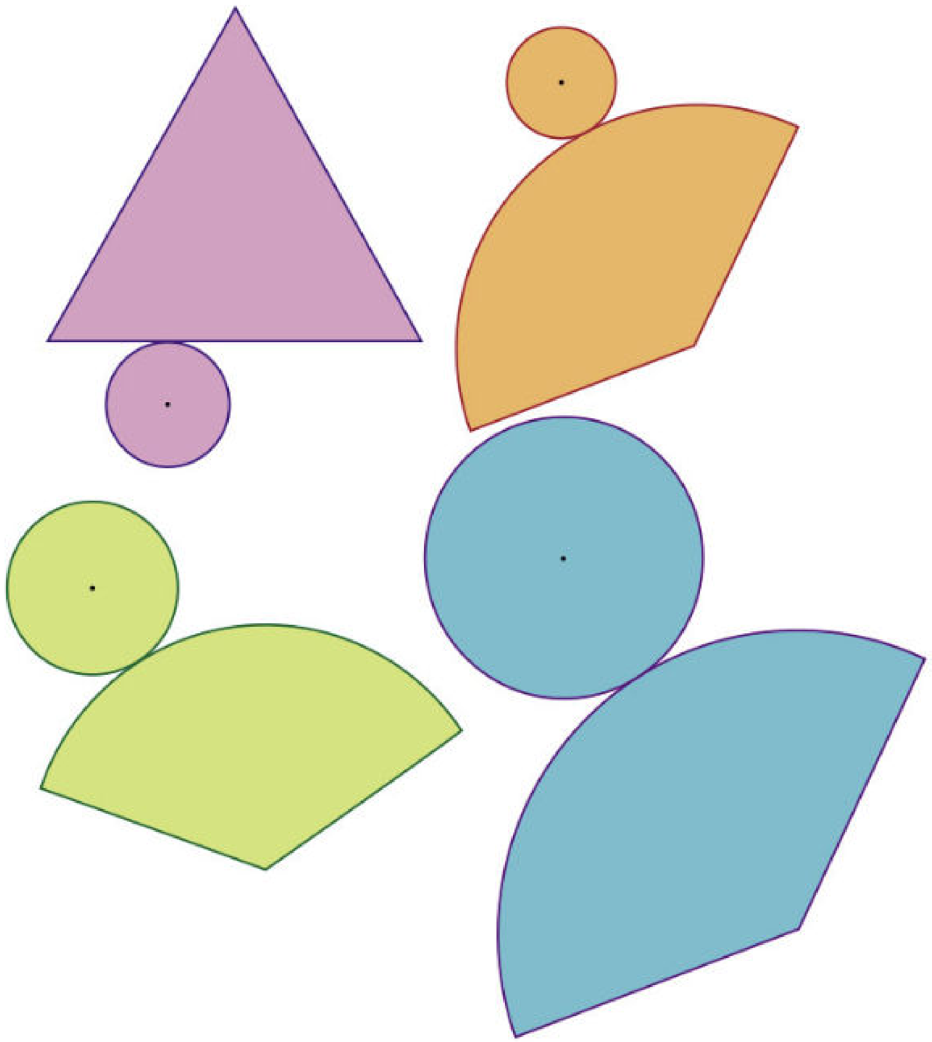
CONTENIDO Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos

En contexto

Conoce la relación de los conocimientos matemáticos con diversos cuerpos de la naturaleza en *Del punto al cuerpo*, de la Biblioteca de Aula.

Reyes Coix, Luis Gerardo, *Del punto al cuerpo*, México, SEP-Oxford University Press, serie Astrolabio, 2007.

1. Marca la plantilla con la que se pueda elaborar un cono; escribe junto a las otras por qué no se puede formar un cono con ellas.



2. Haz, con un compañero, lo que se indica.

a) Tres de las figuras presentadas arriba constan de un sector circular y un círculo, elementos necesarios para elaborar un cono. Sin embargo, sólo en una el arco del sector circular tiene la misma longitud que la circunferencia del círculo. ¿Cuál es? Verifiquen que la figura que marcaron en la actividad 1 sea ésta.

b) Trabaja en equipo. Lean la siguiente información y verifiquen su respuesta del inciso anterior. Tengan en cuenta que en el recuadro se utiliza un ángulo de 73°, pero el ángulo de la plantilla que ustedes eligieron puede ser distinto.

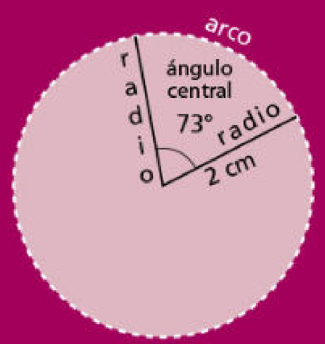
Para calcular la longitud de un arco, se debe tener en cuenta lo siguiente: si una circunferencia de 2 cm de radio estuviera completa mediría

$2\pi r$, que es aproximadamente $2(3.14)(2) = 12.56$ cm.

Esto corresponde a los 360° de la circunferencia completa.

En el siguiente ejemplo, el arco sólo abarca un ángulo de 73°, por lo que se plantea el siguiente problema.

En una circunferencia con 2 cm de radio, a un ángulo de 360° le corresponde una circunferencia de 12.56 cm. ¿Qué longitud le corresponde a uno de 73°?



- Hagan, con ayuda del profesor, lo siguiente.

a) Comparen sus resultados de las actividades anteriores.

b) Comprueben, mediante cálculos, en qué figuras de la actividad 1 la longitud del círculo y la del arco del sector circular coinciden. ¿Cuál es su medida? ______________

____

Una pista

Recuerda tus lecciones de proporcionalidad: 360° es a 12.56 como 73° es a…

3. Haz, en equipo, lo siguiente.

a) Tracen, en una hoja blanca o en un pedazo de cartoncillo, la plantilla para construir un cono con las medidas que se indican a continuación. No olviden ponerle pestañas a la plantilla para pegarla fácilmente.

Radio del sector circular: 8 cm
Ángulo central: 120°

b) Recorten la plantilla y armen el cono.

c) Comparen su cono con los de los otros equipos para comprobar si son iguales.

d) ¿Cuál es la altura del cono que elaboraron? ______________

- **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros; si algunas no coinciden, analicen quién tiene razón y corrijan lo necesario. Luego redacten, entre todos, los pasos para trazar las plantillas de un cilindro y de un cono. Mencionen, en cada caso, con qué medida de la cara lateral se relaciona la circunferencia de la base.**

Una pista

Identifiquen un triángulo rectángulo en el interior del cono y usen el teorema de Pitágoras.

BLOQUE 4

Secuencia 3 / lección 67

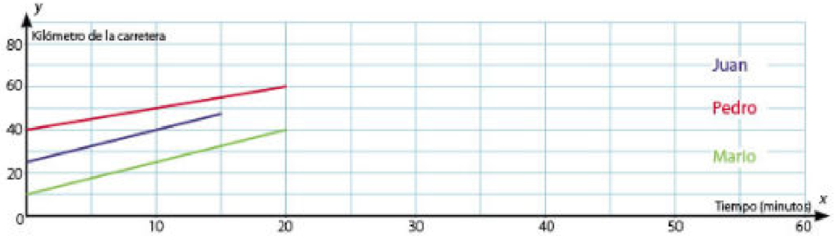
Ángulo de inclinación y pendiente

CONTENIDO

Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

En lecciones anteriores estudiaste que la pendiente de una recta trazada en el plano cartesiano tiene un valor numérico. ¿Cómo se determina ese valor? ¿Qué relación hay entre dicho valor y el ángulo que forma la recta con el eje x? Resolverás este tipo de preguntas al concluir el estudio de esta secuencia.

1. Resuelve en equipo. Tres amigos se reunirán en el kilómetro 90 de una carretera. Las gráficas muestran la relación entre el tiempo transcurrido y el lugar de la carretera en que se encuentra cada uno.



a) ¿Quién se traslada con mayor velocidad? ____________

b) ¿Quién va más despacio? ____________

c) Si continúan al mismo ritmo, ¿quién llegará primero? ____________

d) ¿Quién será el último? ____________

2. Las siguientes expresiones algebraicas corresponden a las tres rectas de la actividad anterior.

$y = x + 40$ $\qquad y = \frac{3}{2}x + 25$ $\qquad y = \frac{3}{2}x + 10$

a) Completa la tabla; indica a quién corresponde cada expresión.

Amigo	Expresión	Pendiente de la recta
Mario		
Juan		
Pedro		

b) ¿Cómo se sabe, a partir de las expresiones algebraicas, quién se traslada con mayor rapidez?

____

Una pista

Puedes prolongar las líneas hasta que lleguen al kilómetro 90.

Ya sabemos...

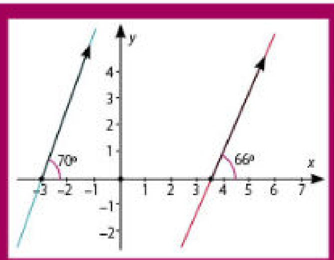
Las gráficas de las expresiones $y = mx + b$ son líneas rectas: b es la ordenada del punto donde la gráfica corta el eje y; m es la pendiente de la recta.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Expliquen en su cuaderno cómo se relaciona la pendiente de cada recta con la velocidad.

3. Trabaja con un compañero. Lean la siguiente información y efectúen lo que se pide.

En las rectas azul y roja se ha marcado su ángulo de inclinación; el de la recta azul mide 70° y el de la roja, 66°.

Advierte que el ángulo de inclinación de una recta está formado por la misma recta y el eje x.



a) Tracen en su cuaderno las siguientes rectas en un plano cartesiano. Midan el ángulo de inclinación de cada una.

$y = 2x$ $\qquad y = 4x$ $\qquad y = \frac{1}{2}x$ $\qquad y = \frac{1}{3}x$

$y = x$ $\qquad y = 0.1x$ $\qquad y = 30x$ $\qquad y = 3x$

b) Completa la tabla. Debes ordenar los datos de mayor a menor ángulo de inclinación (respecto al eje x).

Ecuación de la recta	Medida del ángulo de inclinación	Pendiente

Ya sabemos...

Para trazar una recta, basta localizar dos puntos de la misma.

conect@mos

Practica más acerca de ángulos y pendientes de rectas en

www.redir.mx/SCM3A-181

Contesta las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas.

- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Comenten en qué casos la recta se acerca más a una posición vertical y en cuáles, a una posición horizontal. Después lean la siguiente información.

Dos rectas con la misma pendiente también tienen el mismo ángulo de inclinación.

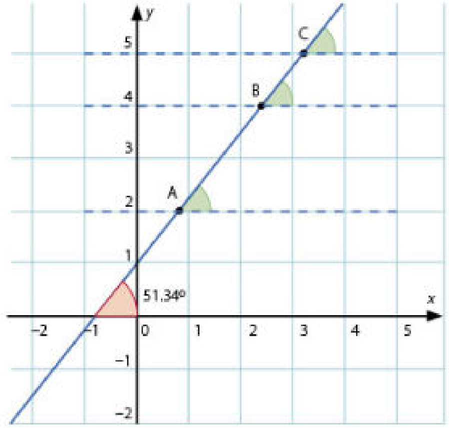
Triángulos rectángulos en el plano

CONTENIDO Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

1. En el siguiente plano cartesiano se ha marcado con rojo el ángulo de inclinación de la recta azul.

En los puntos A, B y C se trazaron rectas paralelas al eje *x*.

a) ¿Los ángulos marcados con vértice en A, B y C miden lo mismo que el ángulo de inclinación de la recta azul? ______



b) Argumenta tu respuesta. ______________________

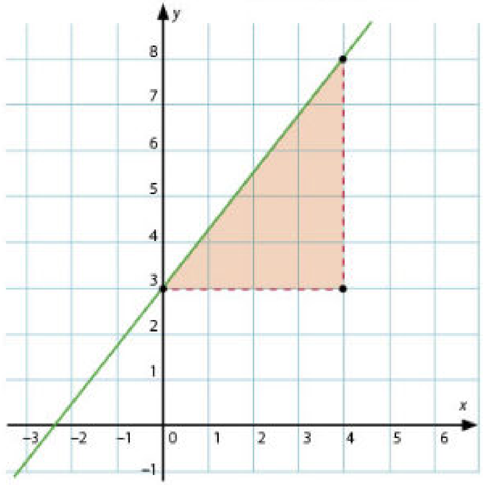
Una pista

Recuerda lo que estudiaste en segundo grado acerca de ángulos entre paralelas y una secante.

2. Considera la recta verde del siguiente plano cartesiano. Se ha trazado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa está sobre la recta.

a) ¿Cómo comprobarías que la ecuación de la recta es $y = \frac{5}{4}x + 3$? ______________________

b) Compruébalo.



c) ¿Cuánto vale la pendiente de la recta? ______

d) Señala en el triángulo el ángulo que corresponde a la inclinación de la recta y nómbralo A.

e) Escribe, como fracción, el resultado de dividir la medida del cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo A.

______

f) Compara tu resultado con la pendiente de la recta. ¿Qué observas? ______________________

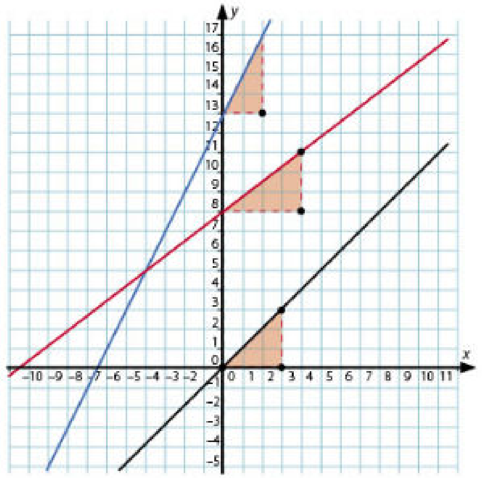
3. Haz lo que se indica a continuación.

a) Escribe al lado de cada ecuación el color de la recta que le corresponde según el plano de la derecha.

$y = x$ ______

$y = \frac{3}{4}x + 8$ ______

$y = 2x + 13$ ______



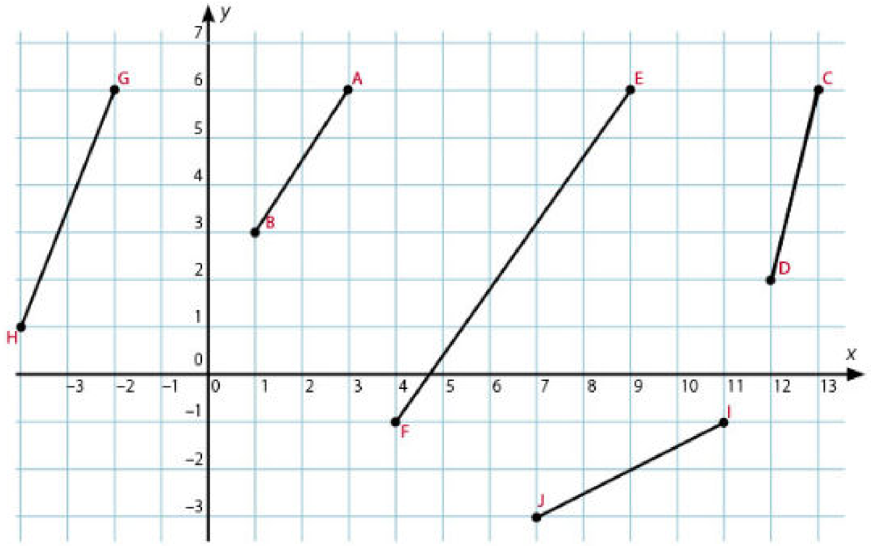
b) Anota en cada triángulo las medidas del cateto opuesto y las del cateto adyacente al ángulo que es igual al ángulo de inclinación de la recta.

c) Calcula el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente y compáralo con la pendiente de la recta.

Comenta, con el grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información. Compárenla con lo trabajado en esta lección.

Cuando en un plano cartesiano se traza un triángulo rectángulo y su hipotenusa está sobre una recta cuyo ángulo de inclinación es agudo, se sabe que…
- uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo es igual al ángulo de inclinación de la recta;
- el cociente del cateto opuesto a ese ángulo entre el cateto adyacente siempre es igual a la pendiente de la recta. A ese cociente se le llama **tangente del ángulo**.

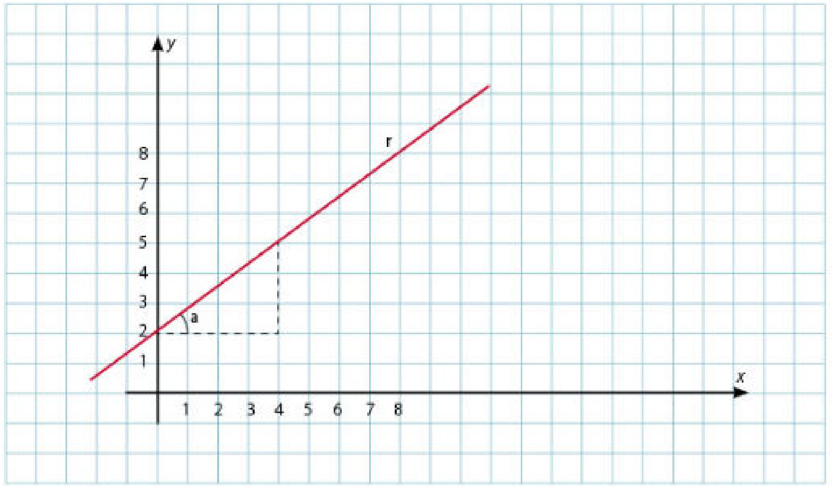
4. En el siguiente plano se han trazado distintos segmentos de rectas. Anota junto a cada uno la pendiente de la recta que le corresponda.



Más ejercicios sobre tangente y pendiente

CONTENIDO Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

1. Haz, en equipo, lo que se pide, con base en la información del plano cartesiano.



a) Anoten en la siguiente tabla los datos que corresponden a la recta **r**.

b) Tracen en el plano las rectas **t** y **s**, de acuerdo con los datos proporcionados en la tabla.

c) Completen la tabla.

	Ordenada al origen	Ángulo de inclinación	Pendiente de la recta	Regla de correspondencia
Recta **r**				
Recta **t**	5	45°		$y = x + 5$
Recta **s**	0	37°	$\frac{3}{4}$	

Reflexionamos
¿Habrá una recta con pendiente 0? ¿Cómo debería ser? ¿Cómo es su ecuación?

- Revisen, con ayuda del profesor, los datos de la tabla y las rectas que trazaron. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y corrijan lo que sea necesario.

2. Lee, con dos compañeros, la siguiente información. Comenten, con el grupo y con ayuda del profesor, lo que entendieron.

Para calcular el valor de la **tangente** que le corresponde al ángulo **a** se puede proceder de dos maneras.
- Primera: se divide la medida del cateto opuesto al ángulo **a** entre la medida del cateto adyacente. Por ejemplo, en el plano de la actividad 1, la tangente de a es $\frac{3}{4}$.
- Segunda: se introduce, en una calculadora que tenga razones trigonométricas, la medida del ángulo, por ejemplo, (37), y luego se presiona la tecla de tangente (tan).

3. Haz, en equipo, lo que se indica para las siguientes expresiones algebraicas.

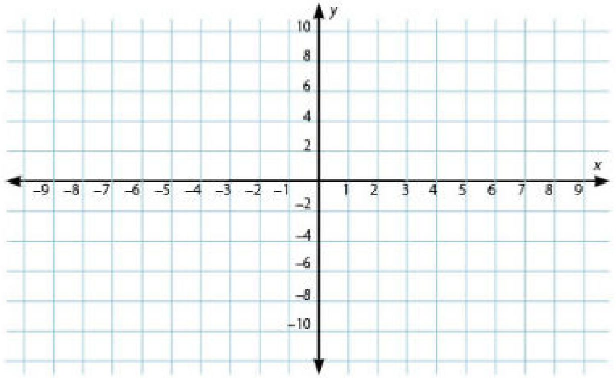
$y = 10x + 2$

$y = 4x - 4$

$y = \frac{1}{2}x - 1$

$y = 10x + 3$

$y = 10x$



a) Grafiquen en el plano cartesiano cada expresión.

b) Completen la siguiente tabla ordenando las tangentes de mayor a menor.

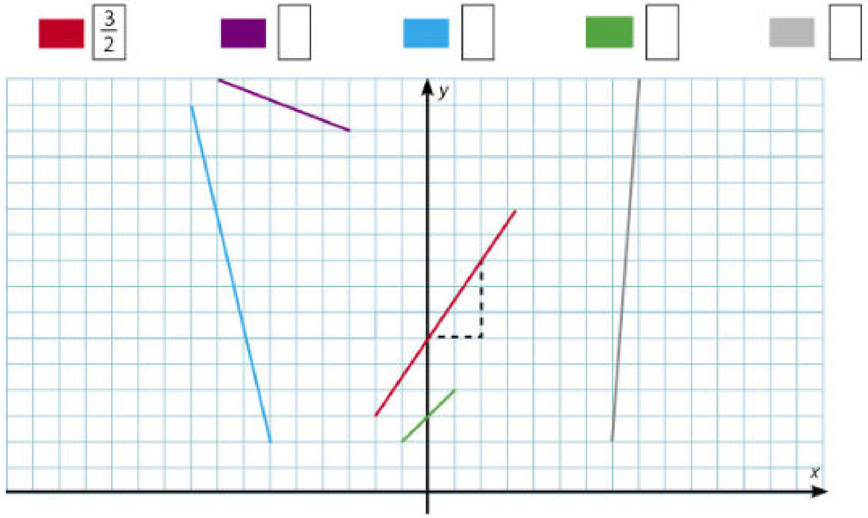
Primera	Segunda	Tercera	Cuarta	Quinta

c) ¿Qué recta tiene mayor ángulo de inclinación? ______________

d) ¿Cuál tiene menor ángulo de inclinación? ______________

e) Expliquen en su cuaderno cómo debe ser la pendiente de una recta paralela al eje *y* o al eje *x*.

4. En el siguiente plano hay varias rectas. Calcula la tangente del ángulo de inclinación de cada una, como en el ejemplo.



conect@mos
Refuerza tus conocimientos acerca de la tangente en
www.redir.mx/SCM3A-185
Trabaja en equipo. Lean la información, comprueben los ejemplos explicados y propongan más ejercicios. Al finalizar, expliquen al resto del grupo lo que aprendieron.

BLOQUE 4

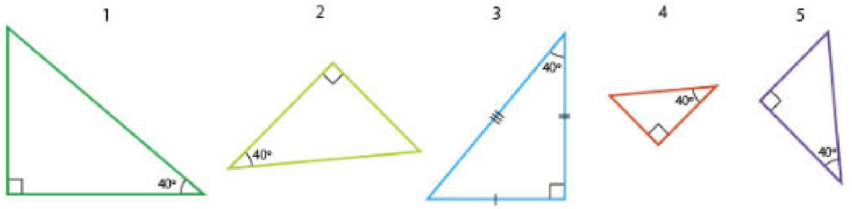
Secuencia 4 / lección 70

Semejanza y cocientes

CONTENIDO Analizo las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

¿Sabías que, en las figuras proporcionales, las razones entre los lados de una figura son iguales a las razones correspondientes en la otra? Por ejemplo, si en un triángulo rectángulo la hipotenusa mide el triple del cateto largo, entonces en cualquier triángulo semejante sucede lo mismo. En esta secuencia explorarás la propiedad descrita.

1. Trabaja en equipo. Hagan, con base en los siguientes triángulos, lo que se indica.



a) Expliquen en su cuaderno por qué se puede asegurar que estos triángulos son semejantes.

b) El cateto marcado con una raya en el triángulo 3 es el **cateto opuesto** al ángulo de 40° (porque está frente al ángulo). El marcado con dos rayas se llama **cateto adyacente** al ángulo de 40° (porque forma parte del ángulo). La hipotenusa está marcada con tres rayas. Marquen de la misma manera los otros triángulos.

c) Midan con regla los catetos y la hipotenusa de cada triángulo y, a partir de los datos que tomen, completen la siguiente tabla. Usen calculadora y redondeen a centésimos.

$\frac{CO}{H}$ quiere decir "medida del cateto opuesto entre medida de la hipotenusa".

$\frac{CA}{H}$ significa "medida del cateto adyacente entre medida de la hipotenusa".

$\frac{CO}{CA}$ quiere decir "medida del cateto opuesto entre medida del cateto adyacente".

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
1						
2						
3						
4						
5						

Ya sabemos...

Dos triángulos son semejantes si los tres ángulos de uno tienen las mismas medidas que los del otro.

Ya sabemos...

El cociente $\frac{CO}{CA}$ se llama tangente.

- Comparen sus tablas con las de sus compañeros. Recuerden que puede haber pequeñas diferencias debido a imprecisiones de medición. Expliquen en su cuaderno por qué en las últimas tres columnas hay valores que se repiten.

2. Trabaja con dos compañeros. Determinen si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). En caso de hallar una falsa, tracen en su cuaderno un triángulo mediante el cual sea evidente que dicha afirmación no se cumple.

a) La medida de la hipotenusa siempre es mayor que la de cualquiera de los catetos. ______

b) La medida del cateto opuesto a un ángulo de 40° siempre será mayor que la medida del cateto adyacente. ______

c) Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 40°, entonces el triángulo es semejante a todos los triángulos de la actividad 1. ______

d) En cualquier triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 40°, el cociente de la medida del cateto opuesto entre la del cateto adyacente al ángulo de 40° siempre será 0.84. ______

e) Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 40°, el cateto opuesto a ese ángulo es más grande que el cateto adyacente. ______

3. Consideren el otro ángulo agudo de los triángulos de la actividad 1.

a) ¿Cuánto mide? ______

b) Identifiquen en cada triángulo los catetos opuesto y adyacente a dicho ángulo. Después completen la siguiente tabla.

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
1						
2						
3						
4						
5						

c) Los cocientes de la quinta columna de esta tabla coinciden con los de la sexta columna de la tabla de la actividad 1.

Expliquen por qué. ______

d) Expliquen cómo debería ser un triángulo rectángulo para que el cociente $\frac{CO}{CA}$ de uno de sus ángulos valiera 1. ______

Una pista

En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto a uno de los ángulos se convierte en el cateto adyacente a otro ángulo, y viceversa: el cateto adyacente a un ángulo es el cateto opuesto a otro.

- Comparen, con ayuda del profesor, sus tablas con las de sus compañeros. Comenten cómo se relacionan las tablas de las actividades 1 y 3.

Los cocientes coinciden

CONTENIDO: Analizo las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

1. Considera triángulos rectángulos con las medidas indicadas en cada recuadro.

Triángulo 1
Medida de los catetos: 4 cm y 3 cm
Medida de la hipotenusa: 5 cm

Triángulo 2
Medida de los catetos: 1 cm y 0.75 cm
Medida de la hipotenusa: 1.25 cm

Triángulo 3
Medida de los catetos: 2 cm y 1.5 cm
Medida de la hipotenusa: 2.5 cm

Triángulo 4
Medida de los catetos: 8 cm y 6 cm
Medida de la hipotenusa: 10 cm

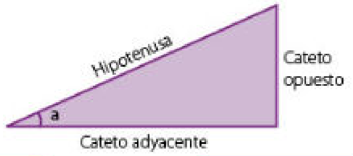
Triángulo 5
Medida de los catetos: 5 cm y 12 cm
Medida de la hipotenusa: 13 cm

Triángulo 6
Medida de los catetos: 2.5 cm y 6 cm
Medida de la hipotenusa: 6.5 cm

Triángulo 7
Medida de los catetos: 15 cm y 36 cm
Medida de la hipotenusa: 39 cm

Triángulo 8
Medida de los catetos: 12 cm y 9 cm
Medida de la hipotenusa: 15 cm

a) Usa el triángulo de la derecha como modelo. Utiliza las medidas de los ocho triángulos anteriores y completa la tabla.



Triángulo	Medida del cateto opuesto al ángulo α	Medida del cateto adyacente al ángulo α	Medida de la hipotenusa	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
1	3 cm	4 cm	5 cm			
2						
3						
4						
5						
6	2.5 cm	6 cm	6.5 cm			
7						
8						

b) En la tabla hay dos grupos de triángulos: los semejantes al triángulo 1 y los semejantes al triángulo 5. ¿Cuáles están en un grupo y cuáles en el otro?

Triángulos semejantes al 1: ______

Triángulos semejantes al 5: ______

c) Explica por qué, en los triángulos semejantes, el cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa siempre vale lo mismo. ______

______

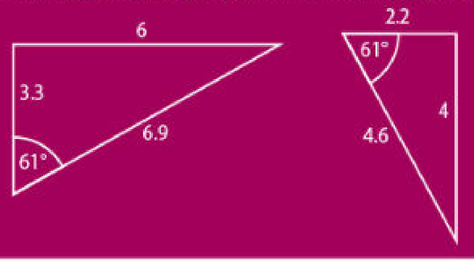
* **Compara tus resultados con los del resto del grupo. Luego comenten, con ayuda de su profesor, la siguiente información.**

Si en dos o más triángulos rectángulos semejantes se considera el mismo ángulo agudo, entonces el cociente $\frac{CO}{H}$ tiene el mismo valor en todos los casos; lo mismo sucede con los cocientes $\frac{CA}{H}$ y $\frac{CO}{CA}$. Esto significa que dichos cocientes sólo dependen de la forma del triángulo, no de su tamaño.

$\frac{CO}{H} = \frac{6}{6.9} = 0.87$

$\frac{CA}{H} = \frac{3.3}{6.9} = 0.48$

$\frac{CO}{CA} = \frac{6}{3.3} = 1.82$

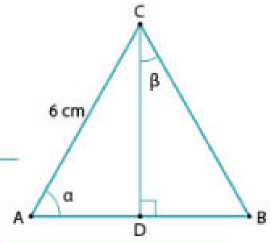


$\frac{CO}{H} = \frac{4}{4.6} = 0.87$

$\frac{CA}{H} = \frac{2.2}{4.6} = 0.48$

$\frac{CO}{CA} = \frac{4}{2.2} = 1.82$

2. En el triángulo equilátero ABC se trazó una de las alturas.



a) ¿Cuánto mide el ángulo α (alfa)? ______ ¿Y el β (beta)? ______

b) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{BD}$? ______ ¿Y el $\overline{CD}$? ______

c) Calcula los siguientes cocientes respecto al ángulo indicado.

Respecto al ángulo...	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{CO}{CA}$
α			
β			

d) Si el triángulo equilátero fuera de distinto tamaño, ¿los cocientes anteriores cambiarían? ______ Justifica tu respuesta. ______

3. Trabaja en equipo. Respondan lo siguiente.

a) Respecto a un ángulo de 45° en un triángulo rectángulo, ¿qué cateto es más grande? ______ ¿Cuánto vale en ese caso el cociente $\frac{CO}{CA}$? ______

b) ¿Y cuando el ángulo mide más de 45°? ______

c) ¿Y cuando mide menos de 45°? ______

BLOQUE 4

Secuencia 5 / lección 72

Seno, coseno y tangente

CONTENIDO: Explicito y uso las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Probablemente habrás notado que en dos o más triángulos rectángulos semejantes, al considerar un ángulo que mide lo mismo en cada uno, la razón o el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente es la misma. En esta secuencia estudiarás con más detalle las relaciones mencionadas.

1. Comenta, en grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información. Después investiguen qué otros cocientes se obtienen a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo y cómo se llaman.

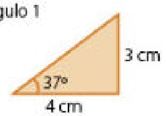
En un triángulo rectángulo, para un ángulo **a**, los cocientes que estudiaste en la lección anterior reciben un nombre especial.

- El cociente que se obtiene al dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa se llama **seno** del ángulo **a**.
- El cociente que se obtiene al dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa se llama **coseno** del ángulo **a**.
- El cociente que se obtiene al dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente se llama **tangente** del ángulo **a**.

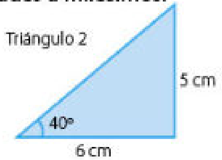
A los cocientes antes mencionados se les llama **razones trigonométricas**.

2. Calcula y escribe en la primera tabla las razones trigonométricas para el ángulo indicado en cada triángulo. Haz lo mismo en la segunda tabla para el otro ángulo agudo de cada triángulo. Redondea las cantidades a milésimos.

Triángulo 1



Triángulo 2



Triángulo 3

Triángulo	Seno	Coseno	Tangente
1	Seno (37°) =	Coseno (37°) =	Tangente (37°) =
2	Seno (40°) =	Coseno (40°) =	Tangente (40°) =
3	Seno (16°) =	Coseno (16°) =	Tangente (16°) =

Triángulo	Seno	Coseno	Tangente
1	Seno (____) =	Coseno (____) =	Tangente (____) =
2	Seno (____) =	Coseno (____) =	Tangente (____) =
3	Seno (____) =	Coseno (____) =	Tangente (____) =

Reflexionamos

¿Qué otros cocientes se obtienen a partir de las medidas laterales de un triángulo rectángulo? Averigua cuáles son y cómo se llaman.

- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Expliquen por qué, en cualquier triángulo rectángulo, el seno de un ángulo agudo siempre vale lo mismo que el coseno del otro ángulo agudo.

3. Trabaja en equipo. Usen la información de la figura 1, que está abajo, para responder.

a) ¿Cuál es el valor del coseno de 70°? ____________

b) ¿Cuál es el valor del seno de 70°? ____________

c) Calculen las medidas que faltan en las figuras 2 y 3.

Figura 1

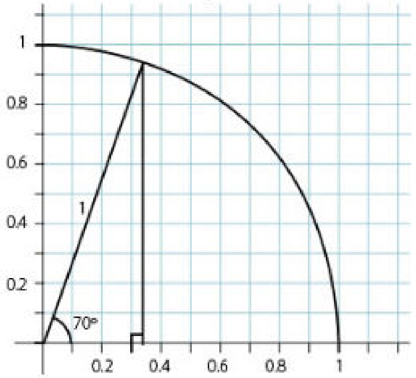


Figura 2

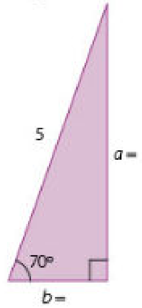
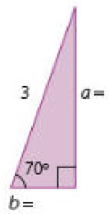


Figura 3



Una pista

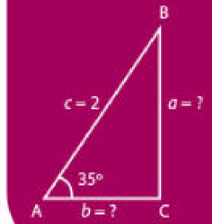
Como la medida de la hipotenusa es 1, basta con determinar la medida del cateto adyacente.

Reflexionamos

Las figuras 1, 2 y 3 son triángulos rectángulos semejantes. ¿Por qué? En la figura 2, la hipotenusa mide cinco veces lo que en la 1. ¿Cuánto deben medir *a* y *b*?

- Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Expliquen en su cuaderno qué procedimiento usaron para responder la actividad.

4. Lee la información. Al finalizar, ejemplifica en tu cuaderno el proceso para calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo a partir de las medidas de un ángulo agudo y del cateto adyacente al mismo.



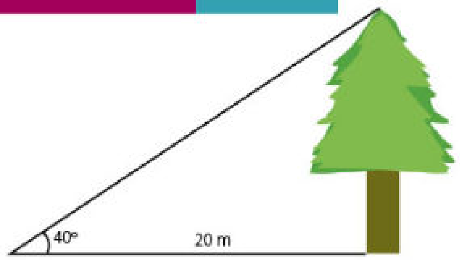
Con las medidas de un lado y de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se pueden obtener las medidas de los otros lados. Por ejemplo, en el triángulo ABC, sen $35° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{2}$.
Por tanto, $a = 2(\text{sen } 35°)$; y como sen 35° es aproximadamente 0.57 (este valor se puede obtener con una calculadora científica), entonces $a = 2(0.57) = 1.14$.
Una vez que se conocen las medidas de dos lados se puede usar el teorema de Pitágoras para calcular la medida del tercero.

5. Contesta lo siguiente.

a) ¿Cuánto mide la altura del árbol? ____________

b) Explica el procedimiento que utilizaste para calcularla. ____________

____



- Compara tu resultado con los de tus compañeros. Comenten si la altura del árbol también se puede calcular por medio de la tangente del ángulo.

Calcular ángulos

CONTENIDO
Explicito y uso las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

1. Trabaja en equipo. Calculen, en cada triángulo, las medidas marcadas con signo de interrogación.

Figura 1

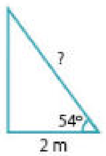


Figura 2

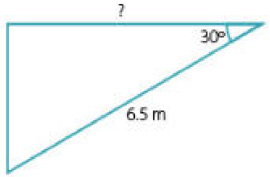
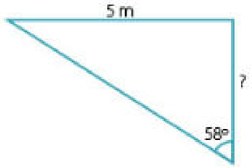


Figura 3



- Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los de sus compañeros. Después respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Con qué razón trigonométrica se calcula la medida desconocida en cada triángulo?

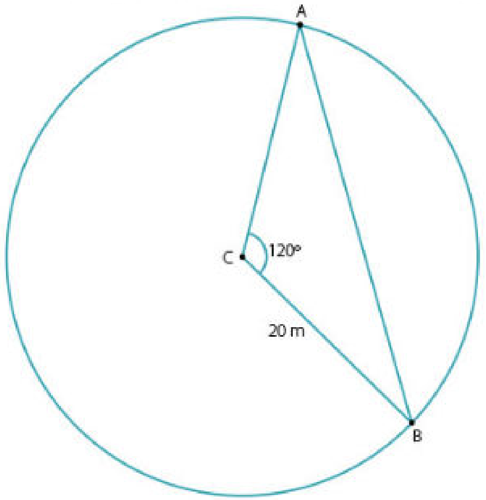
Fig. 1: ______________ Fig. 2: ______________ Fig. 3: ______________

b) Para obtener la medida desconocida de la figura 2, un estudiante hizo lo siguiente: sen 30° = $\frac{x}{6.5}$; entonces, $x = 6.5$ (sen 30°) = 6.5(0.5) = 3.25.

¿En qué se equivocó? ____

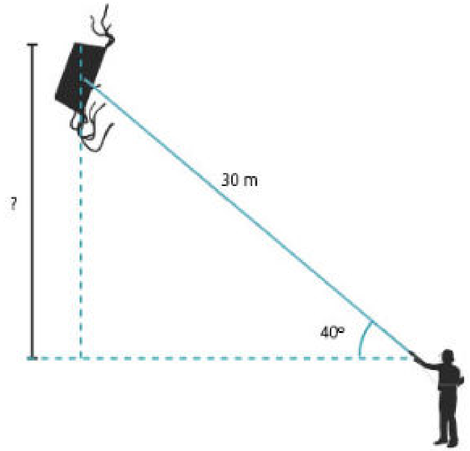
____

2. Determina, en equipo, la longitud que tiene la cuerda $\overline{AB}$ en el siguiente círculo.

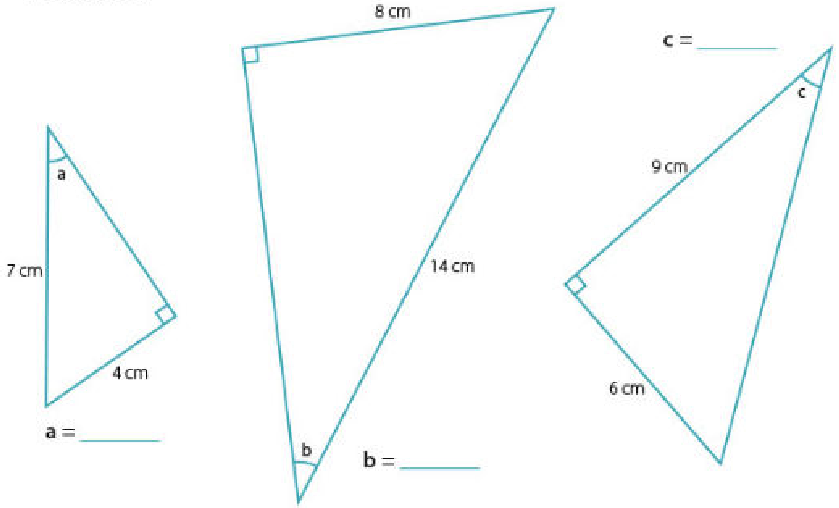


Longitud de la cuerda $\overline{AB}$: ______________

3. Observa la figura y contesta: ¿a qué altura se encuentra el papalote? ______________

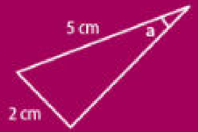


4. Calcula, en equipo, la medida de los ángulos **a**, **b** y **c** en los siguientes triángulos rectángulos.



- Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados y procedimientos con los del resto del grupo. Después lean la siguiente información y comenten qué función tiene la tecla INV en la calculadora.

Si se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, se puede averiguar la medida de los ángulos agudos con ayuda de una calculadora, como se muestra en el siguiente ejemplo.



El cateto opuesto al ángulo a mide 2 cm y la hipotenusa mide 5 cm; entonces, sen a = $\frac{2}{5}$ = 0.4.

Con la calculadora, $\boxed{0.4}$ $\boxed{INV}$ $\boxed{Sen}$ $\boxed{=}$ 23.6°.

BLOQUE 4

Secuencia 5 / lección 74

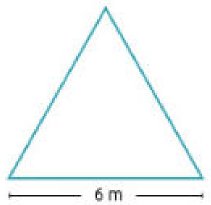
El saber da poder

CONTENIDO
Explicito y uso las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

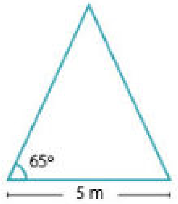
El teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas ayudan a resolver problemas relacionados con triángulos acerca de los cuales se tiene poca información.

1. Trabaja en equipo. Calculen el área de cada figura.

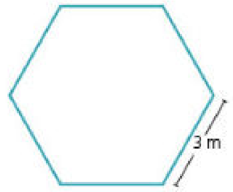
a) Triángulo equilátero.



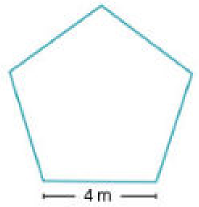
b) Triángulo isósceles.



c) Hexágono regular.



d) Pentágono regular.



- Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Mencionen cómo calcularon el área de los polígonos regulares.

Convivimos

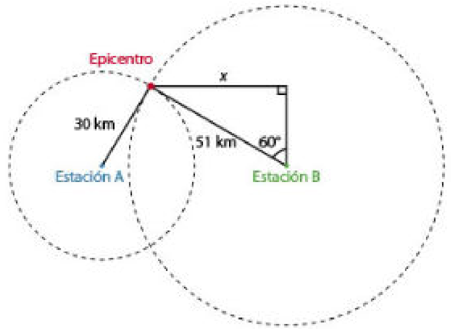
En general, no existe un único modo para resolver problemas relativos a razones trigonométricas. Confía en tus procedimientos y en el intercambio de ideas con tu equipo; no esperes a que el profesor valide las respuestas.

2. Dos estaciones sismológicas, A y B, detectan que el epicentro de un temblor se encuentra a 30 km y 51 km de distancia, respectivamente.
Usa las razones trigonométricas del ángulo de 60° para calcular a cuántos kilómetros al oeste (x) de la estación B se encuentra el epicentro.

x = ______

Explica por qué dos estaciones no bastan para conocer con exactitud la posición del epicentro.

______
______
______
______



En contexto

Las estaciones sismológicas detectan dos tipos de ondas (primarias y secundarias) producidas por los temblores. Como cada tipo de onda viaja a distinta velocidad, la diferencia de tiempo entre la detección de cada una sirve para calcular la distancia entre la estación y el epicentro del temblor.

3. Efectúa, junto con dos compañeros, lo siguiente.

a) Comparen el resultado que obtuvieron para el área del triángulo equilátero en la actividad 1. En particular, analicen cómo calcularon la altura, que debe ser menor a 6 m.

b) Hay una fórmula llamada *fórmula de Herón*, con la que se calcula el área de un triángulo, aun sin conocer la medida de la altura. Dicha fórmula se muestra a continuación.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

En ésta, A representa el área; s, el semiperímetro del triángulo; y a, b y c, las medidas de los lados. Usen esta fórmula para calcular el área del triángulo del inciso a) de la actividad 1. Verifiquen que coincida con la que obtuvieron originalmente.

c) Comparen los resultados que obtuvieron para el área del triángulo isósceles. En particular, analicen cómo obtuvieron la medida de la altura.

d) Comparen los resultados que obtuvieron para el área del hexágono regular. Expliquen, en particular, por qué ese problema es muy similar al del triángulo equilátero. ______

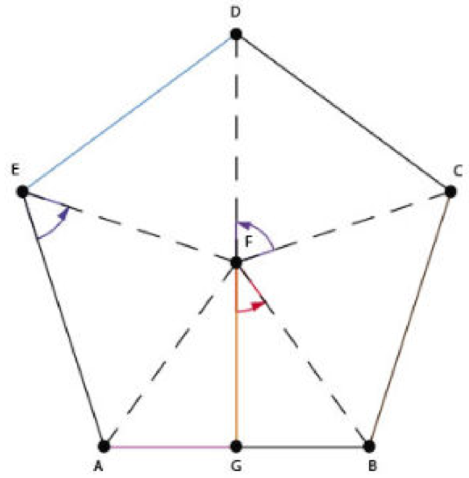
______

e) A continuación se muestran algunas medidas con las que se puede calcular el área del pentágono regular de la actividad 1. Escriban el valor de cada una. Después comenten cuáles usaron ustedes para obtener el área y expliquen al resto del grupo su procedimiento.

$\measuredangle$ AEF = ______

$\measuredangle$ CFD = ______

$\measuredangle$ GFB = ______



$\overline{DE}$ = 4 m

$\overline{FG}$ = ______

$\overline{AG}$ = ______

$\overline{BC}$ = ______

conect@mos

Descarga la actividad relacionada con razones trigonométricas en

www.redir.mx/SCM3A-195

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, comenta, en grupo y con ayuda del profesor, cómo deben ser dos ángulos agudos para que el coseno de uno valga lo mismo que el seno del otro.

BLOQUE 4

Secuencia 6 / lección 75

La velocidad como razón de cambio

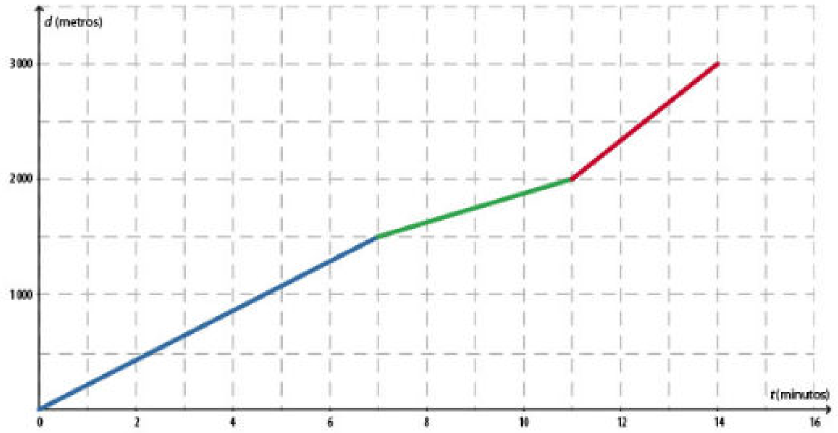
CONTENIDO Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

¿Cuánto avanza un automóvil, con velocidad constante, cada 10 min? Si un hielo se descongela, ¿cuánto aumenta su temperatura cada 15 min? En este apartado estudiarás razones de cambio entre dos magnitudes y su relación con la pendiente de la gráfica que las representa.

1. **Lee la información y efectúa lo que se pide.**

Para mantenerse en buena forma física, cada mañana Agustín rodea a pie un parque cercano a su casa. Ayer lo hizo a distintas velocidades: dio una vuelta caminando, dos corriendo y tres trotando (no necesariamente en ese orden).

La gráfica relaciona la distancia (*d*) recorrida por Agustín y el tiempo (*t*) transcurrido desde que comenzó a ejercitarse.



a) Escribe a qué parte del recorrido corresponde cada segmento de recta.

» Azul: __________ » Verde: __________ » Rojo: __________

b) ¿Cómo se nota en la gráfica qué segmento corresponde al de mayor velocidad?

____

____

____

c) ¿Qué distancia recorrió Agustín? __________

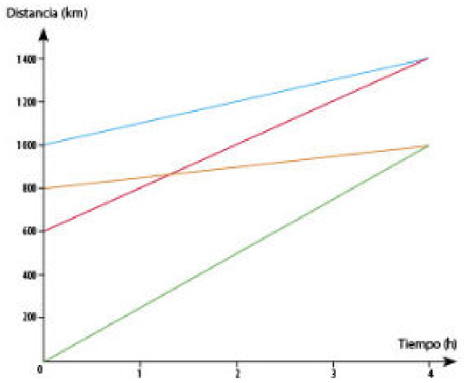
d) ¿Cuánto duró el trayecto? __________

e) Completa la siguiente tabla.

	Tramo azul	Tramo verde	Tramo rojo
Tiempo en que recorrió el tramo		4 min	
Distancia recorrida en el tramo	1 500 m		
Velocidad promedio en el tramo			5.55 m/s

f) Verifica, a partir de los datos de la tabla, tu respuesta del inciso a).

2. **Cuatro trenes viajan con velocidad constante. Las rectas de la gráfica de la derecha relacionan el tiempo transcurrido y la distancia que recorre cada tren.**



a) ¿De qué color es la recta del tren más rápido? __________

b) ¿Y del más lento? __________

c) Traza en el mismo plano una recta que corresponda al movimiento de un tren **más rápido** que cualquiera de los anteriores.

d) Traza una recta que corresponda a un tren **menos rápido** que los anteriores.

3. **Indica, en equipo, qué afirmaciones son verdaderas y cuáles, falsas. Luego comenten la información del recuadro inferior. Un tren A va más rápido que un tren B si…**

a) la recta del tren A llega más alto que la del tren B. __________

b) por cada hora, el tren A avanza más kilómetros que el B. ______

c) el tren A tarda más tiempo que el B en avanzar 100 km. ______

d) dado un mismo aumento en el valor de *x* (tiempo) en ambas rectas, aumenta más el valor de *y* (distancia) en la recta del tren A. ______

e) dado un mismo aumento en el valor de *y* (distancia) en ambas rectas, aumenta más el valor de *x* (tiempo) en la recta del tren A. ______

f) la recta del tren A es menos inclinada que la del tren B. ______

Convivimos

Escribe, en tu cuaderno y con tus palabras, lo que entiendes por *rapidez*. Cuando concluyas, compara tu definición con la del recuadro de abajo. Al incorporar nuevo vocabulario, comprenderás mejor los conceptos que estés aprendiendo.

Para saber qué movimiento es más rápido, no basta comparar el tiempo transcurrido o la distancia recorrida; es necesario considerar la relación entre ambas magnitudes. Por ejemplo, 160 km en 30 min, o 320 km/h. Esta relación es una **razón de cambio** y se llama **velocidad**, o bien, **rapidez**.

BLOQUE 4

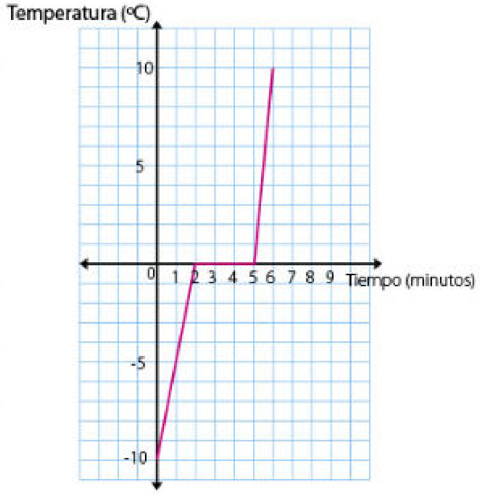
Secuencia 6 / lección 76

Variaciones de temperatura

CONTENIDO

Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

1. En un laboratorio se calentó un trozo de hielo durante 6 min; mientras, se medía su temperatura. El resultado de las mediciones está representado en la gráfica de la derecha.



a) Explica brevemente cómo varió la temperatura durante los 6 min. No olvides mencionar el tramo horizontal.

____

____

____

____

____

b) Determina las siguientes razones para saber cuánto varió la temperatura **por minuto** en cada intervalo de tiempo.

En los primeros dos minutos, la temperatura aumentó ______ grados. Entonces, la variación fue de ______ grados por minuto.

Entre los minutos 2 y 5, la temperatura aumentó ______ grados. La variación fue de ___ grados por minuto.

Entre los minutos 5 y 6, la temperatura aumentó ______ grados. La variación fue de ___ grados por minuto.

c) Observa que las razones de cambio de temperatura son diferentes.

» ¿En qué intervalo no hubo cambio de temperatura? ______________

» ¿En cuál el aumento de temperatura por minuto fue mayor? __________

d) La ecuación que relaciona x con y en el primer intervalo es $y = 5x - 10$. ¿Cuál es la pendiente? ______ ¿Qué relación tiene esta pendiente con la razón de cambio que encontraste? ______________________

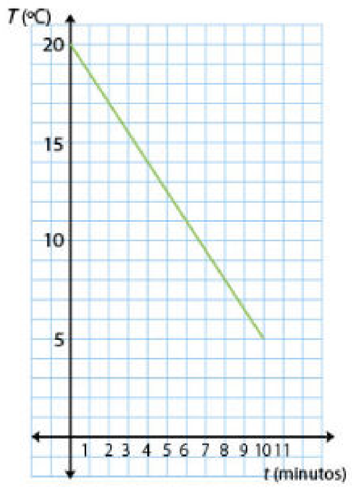
conect@mos

Practica acerca de la razón de cambio en

www.redir.mx/ SCM3A-198

Resuelve los ejercicios propuestos. Al finalizar, comenta con tus compañeros qué dificultades afrontaste.

2. La temperatura del agua en un recipiente fue disminuyendo de manera constante a partir de 20 °C. Ésta se midió durante un periodo de 11 minutos y, con los resultados de las mediciones, se trazó la gráfica de la derecha.



Ya sabemos...

En una ecuación del tipo $y = mx + b$, m determina la inclinación de la recta, y se llama pendiente de la recta.

a) ¿Qué sucede con la temperatura (T) conforme el tiempo (t) aumenta?

____

____

b) Calcula las siguientes razones. Expresa la disminución de la temperatura con un signo negativo.

» Entre los minutos 0 y 4, la temperatura cambió ______ grados en ______ minutos.

» Entre los minutos 4 y 8, la temperatura cambió ______ grados en ______ minutos.

» Entre los minutos 0 y 10, la temperatura cambió ______ grados en ______ minutos.

c) Demuestra que las razones son iguales. ______________________

d) ¿Qué representan estas razones? ______________________

e) La ecuación que relaciona la temperatura (T) con el tiempo (t) es $T = \frac{-3}{2}t + 20$.

¿Cuál es la pendiente? ___________

¿Qué relación tiene esta pendiente con la razón de cambio que encontraste? ________

____

Una pista

Calcula cuánto cambia la temperatura cada 2 minutos.

Una pista

Calcula cuánto cambia la temperatura por minuto.

* Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, comenten por qué coinciden la pendiente y la razón de cambio. Después lean la siguiente información y escriban en su cuaderno las ecuaciones de dos rectas: una con razón de cambio negativa y otra cuya razón de cambio sea positiva.

Cuando la **razón de cambio** entre dos cantidades es **constante**, la gráfica de la relación es una **línea recta**. La **razón de cambio** de una recta es su **pendiente**.

Cuando una cantidad aumenta, la otra también lo hace; la **razón de cambio** es **positiva**. Por ejemplo, en el caso del cubo de hielo, mientras el tiempo aumentaba, la temperatura también lo hacía.

En el ejemplo de disminución de temperatura, mientras t aumentaba, T disminuía. En ese caso, la **razón de cambio** de la recta es **negativa**.

BLOQUE 4

Secuencia 6 / lección 77

La pendiente como razón de cambio

CONTENIDO Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

1. En cada renglón de la siguiente tabla, se muestran las coordenadas de dos puntos pertenecientes a una recta. Sin trazarlas, anota cuál de las dos rectas agrupadas en cada inciso tiene mayor pendiente.

a)

Recta	Pasa por	¿Qué recta tiene la pendiente mayor?	¿Cómo lo sabes?
m	(0, 0) y (1, 2)		
n	(0, 0) y (1, 3)		

b)

p	(3, 5) y (4, 7)		
q	(2, 9) y (6, 17)		

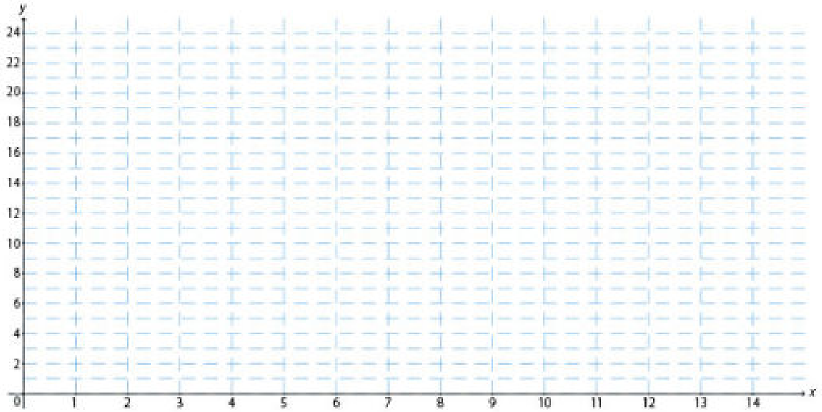
c)

r	(7, 15) y (11, 23)		
s	(7, 15) y (10, 23)		

d)

t	(11, 3) y (13, 8)		
u	(7, 10) y (13, 20)		

e) Traza las rectas en el plano cartesiano. Después explica en tu cuaderno cómo se nota en la gráfica qué razón de cambio es mayor.



Una pista

Dado un punto en ciertas coordenadas (x, y), imagina que al desplazarte x unidades sobre el eje horizontal, subes y unidades sobre el vertical. ¿En qué caso la pendiente es mayor, cuando te desplazas 1 para subir 2 o cuando te desplazas 1 para subir 3?

- Comenta, con el grupo, tus respuestas y argumentos. Después lean la siguiente información y expliquen cómo se puede saber, a partir de las coordenadas de los puntos, qué recta de la actividad 1 tiene mayor pendiente.

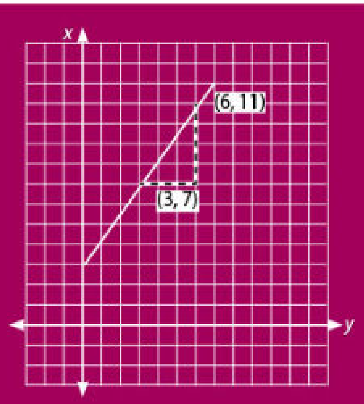
La pendiente de una recta también es la razón de cambio de las ordenadas respecto a las abscisas. Así como la pendiente de una recta es constante, su razón de cambio también. Para calcularla se eligen dos puntos cualesquiera de la recta; por ejemplo, (6, 11) y (3, 7).

Por cada vez que x aumenta 3, y lo hace 4. En otras palabras, cuando x aumenta 1, y lo hace $\frac{4}{3}$.
El cálculo también se puede hacer así:

razón de cambio $= \frac{\text{cambio de } y}{\text{cambio de } x}$;

razón de cambio $= \frac{(11-7)}{(6-3)}$;

razón de cambio $= \frac{4}{3}$.



2. En cada tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos pertenecientes a una recta. Anota, en cada caso, el valor de su razón de cambio (pendiente).

Recta 1		Recta 2		Recta 3	
x	y	x	y	x	y
0	5	0	2.5	0	0
1	7	0.5	3	$\frac{1}{2}$	2
2	9	1	3.5	$\frac{3}{2}$	6
3	11	1.5	4	$\frac{5}{2}$	10
Razón de cambio:		Razón de cambio:		Razón de cambio:	

Recta 4		Recta 5		Recta 6	
x	y	x	y	x	y
7	50	0	0	0	8
8	40	1	6	2	2
9	30	5	30	4	−4
10	20	7	42	10	−22
Razón de cambio:		Razón de cambio:		Razón de cambio:	

- Comenta, con el resto del grupo, las respuestas de los problemas anteriores. Expliquen por qué, a diferencia de la actividad 1, en el problema anterior la recta con mayor pendiente no es la que más se acerca al eje vertical.

3. Escribe en tu cuaderno un problema que se resuelva usando la razón de cambio de una recta. Plantéaselo a un compañero y resuelve el de él.

conect@mos

Descarga la actividad de razón de cambio en

www.redir.mx/SCM3A-201

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, comenta con tus compañeros el significado de la razón de cambio en la situación que propusiste.

BLOQUE 4

Secuencia 7 / lección 78

El mejor horno

CONTENIDO

Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

Hay situaciones donde lo que interesa de un conjunto de datos es conocer su dispersión (qué tan separados o juntos están entre sí). En esta secuencia aprenderás que la desviación media es un recurso útil para el análisis de la dispersión de un conjunto de datos.

1. **Para comparar la precisión de horneado de dos hornos de gran tamaño, se puso el termostato de cada uno a 180 °C y se tomó la temperatura (en °C) en distintos puntos.**

Horno A				
160	200	192	190	188
162	180	165	196	182
198	170	194	170	160
187	166	186	184	164

Horno B				
194	204	185	200	188
190	198	187	189	192
193	193	194	170	194
175	181	187	192	184

a) La temperatura de 180 °C es la indicada en el manual como la idónea para el horneado de panqués.

¿Consideras que ambos hornos son igual de adecuados para hornear panqués?

__________ ¿Por qué? ____________________________________

____

b) Trabaja en equipo. Comenten cómo conviene analizar los datos para tomar una decisión. Distribuyan el trabajo según convengan y anoten sus conclusiones.

¿Qué horno es mejor para hornear panqués? ____________________________

____

¿Por qué? ____________________________________

____

____

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Lleguen a una decisión común y anoten sus comentarios.

____

____

2. **Doña Carmen —experta repostera que hornea panqués en grandes cantidades y que asegura no saber matemáticas—, su marido y su hijo —estudiante de ingeniería— discuten acerca de qué horno deben seleccionar para hornear panqués.**

Marido: Las temperaturas del horno A varían de 160 °C a 200 °C y las del B, de 170 °C a 204 °C. Es mejor el horno B porque hay menos variación de temperatura.

Doña Carmen: En el horno A, mientras unos panqués quedan crudos, otros se queman, y sólo algunos salen bien cocidos. En el B, los panqués se queman, pero si la temperatura se reduce un poco, quedan mejor que en el A.

Hijo: El promedio de temperaturas en el horno A es 179.7 °C y en el B, 189.5 °C. El promedio más cercano a 180 °C es el del A; por eso es mejor.

Argumenta, en equipo, con quién estás de acuerdo. Expliquen su respuesta. __________

____

____

____

____

____

Una manera de saber qué variación hay en las temperaturas es considerar el **rango**, es decir, la diferencia entre los valores máximo y mínimo del conjunto de datos. Saber que en el horno A el rango de temperaturas es de 40 °C, es un primer indicador de que, a pesar de que el promedio es cercano a 180 °C, la temperatura del horno es muy irregular.
En la siguiente lección aprenderás otra manera de considerar la variación de temperatura.

3. **Escribe, para cada afirmación, una V si consideras que es verdadera, y explica en tu cuaderno por qué lo es; o una F si supones que es falsa. En este último caso, justifica tu respuesta con un ejemplo en que no se cumpla la afirmación.**

a) Si dos conjuntos de números tienen el mismo rango, entonces sus promedios son iguales. ______

b) Si dos conjuntos de números tienen el mismo rango, entonces sus valores máximo y mínimo coinciden. ______

c) Si dos conjuntos tienen rangos y promedios iguales, entonces los conjuntos son idénticos. ______

Desviación media

CONTENIDO

Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

1. Una manera de analizar los datos de temperatura obtenidos de los hornos A y B de la lección anterior es calcular la desviación media de cada caso y compararlas. La del horno B se obtiene de la siguiente manera.

- Se calcula la media aritmética del conjunto de datos.
- Se calcula la diferencia entre cada dato y la media aritmética (se considera el número sin signo, pues sólo interesa saber su diferencia con la media aritmética, es decir, la desviación del dato respecto a la media).
- Se calcula la media aritmética de esas diferencias, la cual es la desviación media.

Dato	Diferencia respecto a 189.5
194	4.5
190	0.5
193	3.5
175	14.5
204	14.5
198	8.5
193	3.5
181	8.5
185	4.5
187	2.5
194	4.5
187	2.5
200	10.5
189	0.5
170	19.5
192	2.5
188	1.5
192	2.5
194	4.5
184	5.5
189.5 (media aritmética)	5.95 (desviación media)

Ya sabemos...

La media aritmética de un conjunto de datos es su promedio. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo el resultado entre el número de ellos.

2. Calcula y escribe los datos que faltan para determinar la desviación media del horno A.

Dato	160	162	198	187	200	180	170	166	192	165	194	186
Diferencia respecto a 179.7	19.7		18.3	7.3		0.3		13.7		14.7		6.3

Dato	190	196	170	184	188	182	160	164	Media aritmética	
Diferencia respecto a 179.7	10.3	16.3		4.3			19.7		Desviación media	

3. ¿De qué manera estos nuevos datos (la desviación media de cada horno) ayudan a explicar la elección de doña Carmen y sus observaciones? ______

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Lleguen a una decisión común.

4. Califica cada afirmación como verdadera o falsa. Argumenta tu respuesta.
La desviación media del horno A es mayor que la que del B porque...

a) hay más medidas de temperatura en el A. ______

b) las medidas del A están más alejadas unas de otras, es decir, más dispersas. ______

c) la temperatura del A es menos estable, es decir, cambia más durante cierto lapso de tiempo. ______

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Mencionen cómo calcularon la desviación media del horno A y comenten sus argumentos de la actividad 3.

En segundo grado estudiaste casos en los que las medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética), al ser valores representativos de un conjunto, no siempre aportaban suficiente información, pues no indicaban la dispersión de los datos.

La **desviación media** informa sobre el grado de dispersión de un conjunto de datos respecto a su media aritmética.

En el ejemplo de las lecciones anteriores, para que un horno sea eficiente es importante que mantenga una temperatura uniforme y, por tanto, que los datos presenten un grado pequeño de dispersión.

El horno A tiene rango de 40 y desviación media de 12.06, mientras que el B, rango de 34 y desviación media de 5.95. Las temperaturas son más uniformes en el horno B; por eso es más eficiente.

Anestesia y otros problemas

CONTENIDO

Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

1. **Lee la información y haz lo que se pide.**

Para investigar la efectividad de dos anestesias, se administró cada una a 16 personas. En todos los casos se registró la duración del efecto. La duración promedio de la anestesia A fue de 23 min y la desviación media, 5.75 min; la duración promedio de la B fue de 25 min y la desviación media, 13.5 min.

a) Califica cada oración como **verdadera** o **falsa**. Argumenta tus respuestas en tu cuaderno.

La desviación media del conjunto de datos permite asegurar que…

» a todas las personas, el efecto de la anestesia A les duró entre 23 min – 5.75 min y 23 min + 5.75 min. ________________

» aunque es necesario probarla con más personas, la anestesia A parece ser más adecuada que la B. ________________

» a casi todas las personas, el efecto de la anestesia A les duró entre 17 min y 29 min.

____

b) En la siguiente tabla se muestra la duración de la anestesia A en las 16 personas. Revisa si esta información contradice tus respuestas del inciso anterior.

Duración del efecto (min)							
19	25	22	31	17	17	20	27
23	19	32	14	34	35	22	11

c) Explica en tu cuaderno por qué, aunque se conozca el promedio y la desviación media de un conjunto de datos, no es posible deducir su rango.

* **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Después redacten, de manera grupal, una explicación común para el inciso c).**

2. **Lee la siguiente información y responde.**

Durante un año, cuatro personas recibieron ingresos de la siguiente manera.

» Gisela es vendedora; además de un sueldo base mensual, recibió comisiones dependiendo del número de ventas que hizo, por lo que su ingreso mensual fue variable.

» Tomás es editor; percibió una cantidad fija de dinero cada mes.

» Paola es abogada; recibió un sueldo fijo mensual en una empresa, pero después de medio año la promovieron, por lo que su salario aumentó considerablemente.

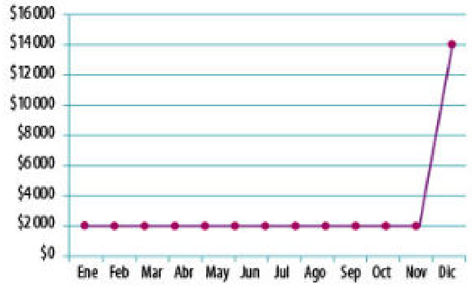
» Nicolás es estudiante; recibió una cantidad fija de dinero al mes por ser ayudante de profesor, además de un único pago en diciembre por un proyecto escolar.

a) ¿En qué casos la desviación media del ingreso mensual coincide con la desviación de cada mes? ________________

b) ¿En qué casos la desviación media y el rango son 0? ________________

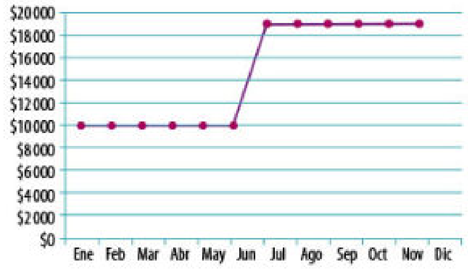
c) Las siguientes gráficas muestran las variaciones en el salario mensual de cada persona. Escribe, junto a cada una, el nombre de la persona correspondiente. Luego revisa tu respuesta del inciso anterior.

____



____

____



____

* **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Identifiquen, de preferencia sin hacer cálculos, qué salarios de la actividad anterior tienen el mismo rango, pero distinta desviación media; y cuáles tienen la misma desviación media, pero distinto rango.**

conect@mos

Descarga la actividad relativa a la medición de la dispersión en

www.redir.mx/SCM3A-207

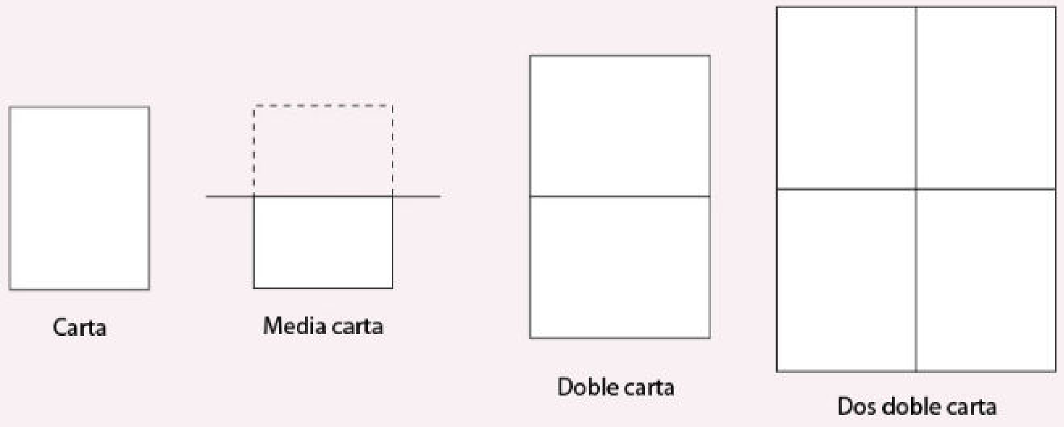
Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Redacten, de manera grupal, fórmulas para encontrar, con una hoja de cálculo, el promedio, el rango y la desviación media de un conjunto de datos.

Como comprobaste en las dos lecciones anteriores, el rango y la desviación media ayudan a analizar qué tan dispersos están los datos. No obstante, tienen algunas diferencias. Por ejemplo, en el problema anterior hay dos conjuntos con el mismo rango pero distinta desviación media, y dos con la misma desviación media pero distinto rango.
El rango nos muestra dónde están ubicados los datos, mientras que la desviación media, qué tan separados están del promedio. Estas diferencias son importantes para decidir cuál conviene usar en cada problema.

Una hoja de papel

Mide los lados de una hoja tamaño carta. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Calcula las medidas de los otros tres rectángulos que se muestran abajo.



- Media carta (la mitad de una hoja carta partida por su lado largo).
- Doble carta (dos hojas carta pegadas por su lado más largo).
- Dos doble carta (dos hojas doble carta pegadas por su lado más largo).

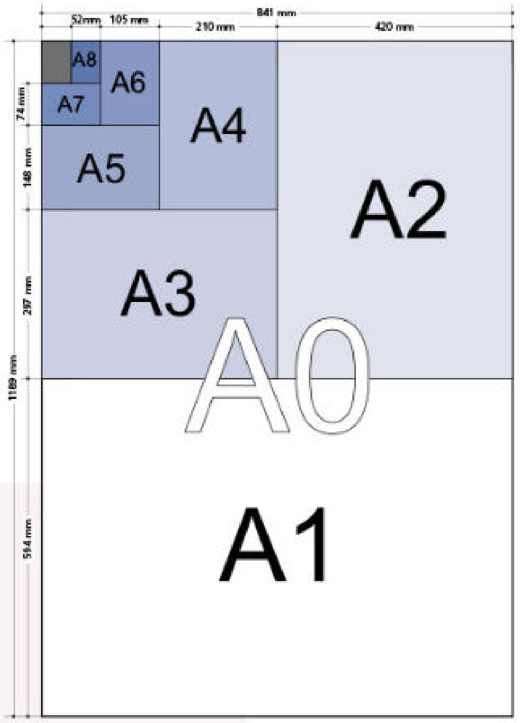
¿Cuáles de los cuatro rectángulos son semejantes? Explica en tu cuaderno por qué.

Argumenta si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Siempre que cortamos un rectángulo a la mitad, por su lado más largo, se obtienen dos rectángulos semejantes al original.
- Al juntar cuatro rectángulos iguales podemos obtener un rectángulo semejante a esos rectángulos por separado.

Hay rectángulos mediante los cuales, al cortarlos a la mitad (por su lado más largo), se obtienen dos rectángulos semejantes al original. ¿Puedes dibujar un rectángulo así? ¿Cuáles deben ser sus dimensiones? (Una pista: si tienes un rectángulo cuyo lado menor mide 10 cm y cuyo lado mayor, *x* cm, ¿cuánto debe valer *x* para que, al cortar el rectángulo, se obtenga otro semejante?).

En la mayoría de los países no se utiliza el papel tamaño carta, sino un formato de papel estándar llamado serie A. El tamaño A0 es un pliego de papel de 1 m² de superficie, del cual, al cortarlo por la mitad, se obtienen dos rectángulos semejantes al original. El tamaño A1 se obtiene al cortar el A0 a la mitad, por su lado más largo. El A2, a partir del A1, y así sucesivamente.



- Elabora una tabla en la que anotes las dimensiones de todos los tamaños de papel, desde A0 hasta A8; verifica que todos sean rectángulos semejantes (aproximadamente, porque las dimensiones están redondeadas).
- ¿Cuál es el tamaño más parecido al tamaño carta?
- Si tienes un dibujo en tamaño carta y quieres ampliarlo a tamaño doble carta, ¿cómo debe ser la ampliación para que el dibujo quede exactamente igual?
- Si tienes un dibujo en tamaño A3 y deseas ampliarlo a tamaño A1, ¿qué porcentaje deben tener las longitudes del dibujo ampliado respecto al dibujo original?
- Si tienes un dibujo en tamaño A3 y quieres reducirlo a tamaño A4, ¿qué porcentaje deben tener las longitudes del dibujo reducido respecto al dibujo original?

El formato carta sólo se sigue utilizando en México, Estados Unidos de América, Canadá, Colombia y Filipinas. Se espera que en los próximos años se haga la transición a la serie A en estos países, pues con ese formato no se desperdicia papel al hacer ampliaciones o reducciones en distintos tamaños; además, es más conveniente que en el mundo entero se utilice un tamaño de papel estandarizado.

Subraya la opción correcta.

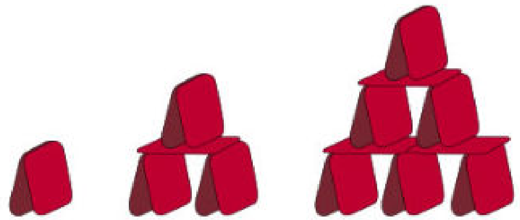
1. ¿Qué expresión sirve para calcular el número de cartas de la figura n en la sucesión?

a) $2n^2 + n$

b) $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

c) $2n^2 - n + 1$

d) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$



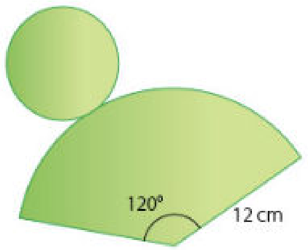
2. La siguiente figura representa el desarrollo plano de un cono. ¿Cuánto mide el radio del círculo pequeño?

a) 2 cm

b) 3 cm

c) 4 cm

d) 5 cm



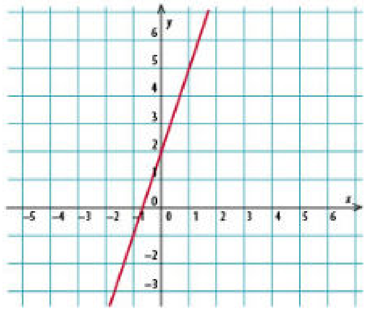
3. ¿Qué pendiente tiene la recta roja?

a) –1

b) $\frac{1}{2}$

c) 2

d) 3



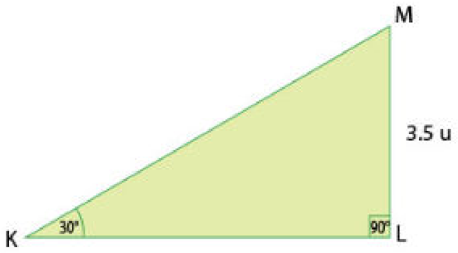
4. En el triángulo **KLM** se indica la medida de dos ángulos y un lado. ¿Cuánto mide el lado **KM**?

a) 3.5 u

b) 6 u

c) 7 u

d) 10.5 u



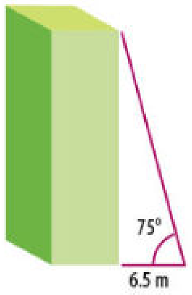
5. ¿Qué expresión permite calcular la altura (h) del edificio?

a) $h = (\text{sen } 75°)(6.5)$

b) $h = \frac{(6.5)}{(\tan 75°)}$

c) $h = \frac{(\text{sen } 75°)}{(6.5)}$

d) $h = (\tan 75°)(6.5)$



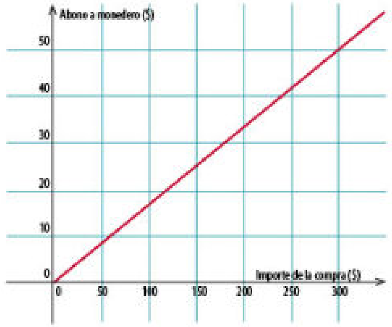
6. En la gráfica de la derecha se representa la cantidad de dinero que abona una tienda a sus clientes, dependiendo del importe de compra. ¿Qué parte de la compra se abona al monedero del cliente?

a) \$10.00 por cada \$50.00 de compra.

b) La mitad de la compra.

c) 20% de la compra.

d) $\frac{1}{6}$ de la compra.



7. En la siguiente tabla se muestran los resultados de una prueba de lectura efectuada a algunos alumnos de la escuela secundaria Ignacio Manuel Altamirano, en Zacatecas.

	María	Ximena	Salvador	Rodrigo	Patricia	Pedro
Palabras leídas por minuto	151	163	173	158	181	149

¿Qué alumno se alejó más del promedio y cuál fue su desviación?

a) Pedro, con una desviación de 13.5.

b) Pedro, con una desviación de 30.

c) Patricia, con una desviación de 17.5.

d) Patricia, con una desviación de 18.5.

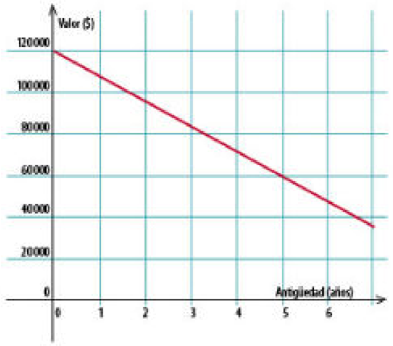
8. En la gráfica de la derecha se muestra cómo ha cambiado el valor de un coche a partir de su compra. ¿Qué porcentaje del valor original ha perdido cada año?

a) 5%

b) 10%

c) 12%

d) 20%



Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Atínale al peso

En la feria del pueblo, Jacinto y sus amigos encontraron un concurso peculiar: cada concursante estimaba con la pura vista el peso de la persona que atendía el puesto, y ganaba si acertaba al peso exacto o si erraba por 1 kg o menos (el margen de error era de 1 kg). Si el concursante no ganaba, sólo se le comunicaba que su estimación había rebasado el peso exacto o ésta no era suficiente.

Jacinto y sus amigos hicieron las siguientes estimaciones.

Persona	Jacinto	Gema	Claudio	Alejandro
Peso que estimó	85 kg	80 kg	84 kg	81 kg
Resultado	Se pasó.	Le faltó.	Se pasó.	Le faltó.

Pregunta 1. ¿Quiénes estuvieron más cerca de ganar?

Pregunta 2. ¿En qué rango está el peso de la persona que atendía el puesto?

Pregunta 3. ¿Con qué margen de error hubieran podido ganar quienes estuvieron más cerca de estimar el peso exacto?

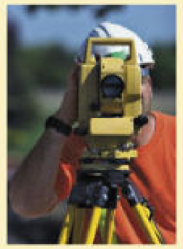
Pregunta 4. Al ser el último en jugar, Alejandro tenía información suficiente para ganar. Explica por qué.

Pregunta 5. Inventa un peso que cumpla con las condiciones del problema y calcula la desviación en la estimación de cada participante.

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Manejar técnicas eficientemente

Ángulos para orientarse y medir



Los marineros utilizan el sextante para calcular el rumbo de sus naves. Este aparato emplea la medición de ángulos para conocer la posición de algún astro, lo que, combinado con la hora del día, permite calcular la latitud en tierra del observador. El sextante puede determinar ángulos comprendidos entre 0° y 60°.

Los topógrafos e ingenieros utilizan, a su vez, el teodolito, un instrumento que permite medir a la vez ángulos horizontales y verticales para calcular distancias inaccesibles.

Actualmente disponemos de instrumentos de navegación más avanzados, como el GPS, que indica nuestra posición con bastante exactitud gracias al sistema de satélites en que se apoya.

Pregunta 1. ¿Por qué el sextante recibe ese nombre?

Pregunta 2. Un topógrafo se coloca a 40 m de distancia de un edificio y advierte que el ángulo de inclinación de su línea de visión a la punta del edificio es de 35°. ¿Cual es la altura de dicho edificio?

Pregunta 3. Investiga qué significan las siglas GPS y cuántos satélites necesita un GPS para localizar un punto. Explica por qué.

Pregunta 4. En la mayoría de los barcos modernos se utilizan GPS para navegar; sin embargo, en estos aún se cuenta con un sextante, que puede utilizarse en caso de ser necesario. ¿En qué casos resultaría útil el sextante en lugar del GPS?

Autoevaluación

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

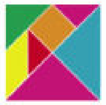
Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.				
Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo.				
Elaboro desarrollos planos de conos y cilindros rectos.				
Analizo las relaciones existentes entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa, y el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente.				
Analizo las relaciones existentes entre los ángulos agudos y los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo.				
Utilizo las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente, para resolver problemas.				
Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.				
Identifico la pendiente de la recta que representa un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.				
Mido la dispersión de un conjunto de datos e identifico las diferencias entre la "desviación media" y el "rango".				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Y para terminar...

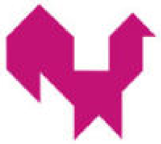
El tangram

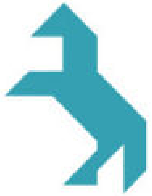
El tangram es un rompecabezas chino de siete piezas: cinco triángulos rectángulos isósceles, un cuadrado y un paralelogramo.



Con las siete piezas es posible armar figuras sencillas, como las que se muestran a continuación.

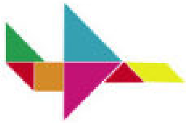
Elabora un tangram. Traza en cartulina, cartoncillo duro o *foamy*, un cuadrado de 15 cm de lado y, dentro de él, traza las siete piezas y recórtalas. Usa tu tangram para formar las siguientes figuras.



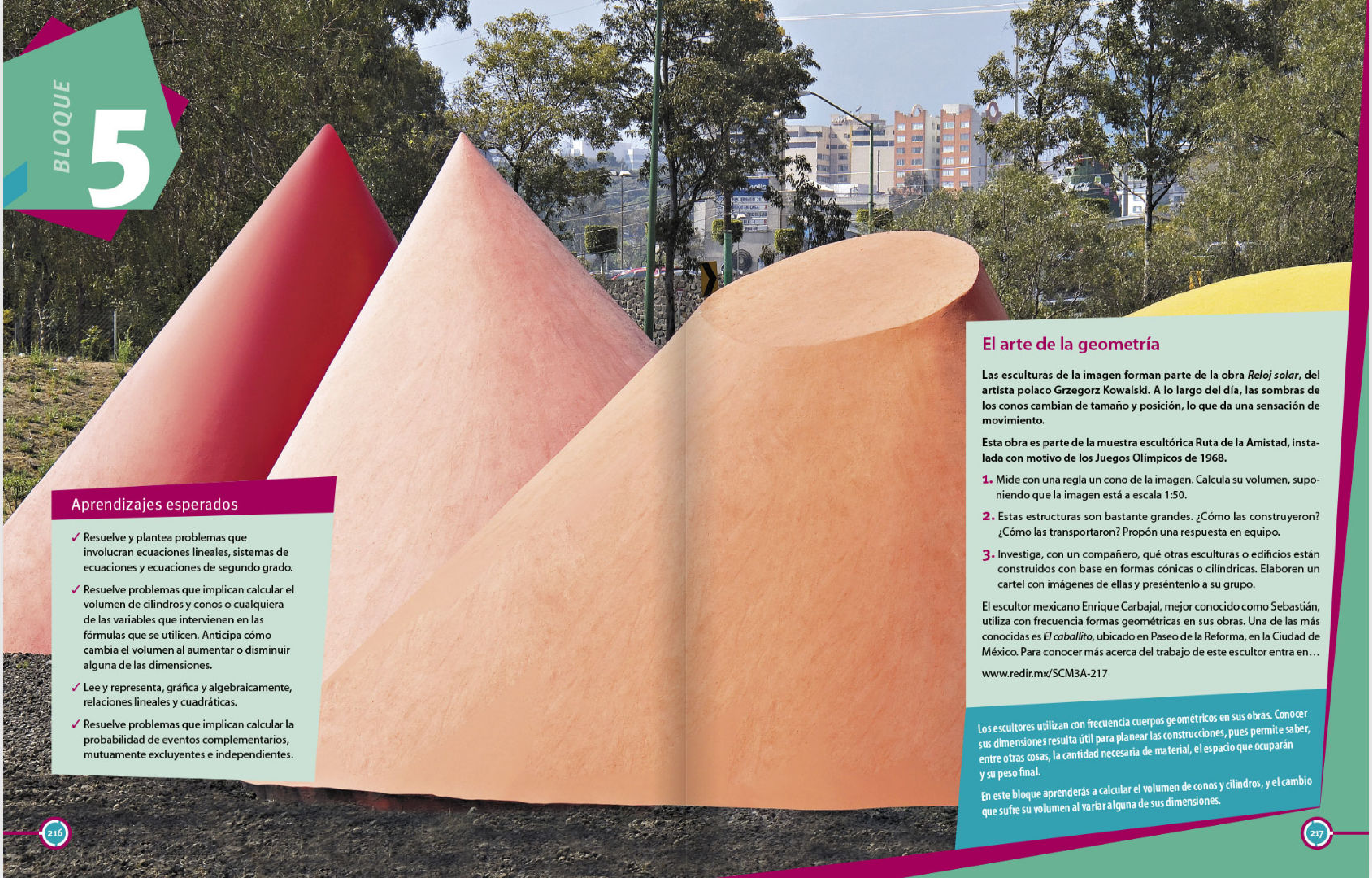


Hay figuras más complicadas de formar, como el león, que se arma con dos tangrams (14 piezas). Forma al ciclista y el microscopio.

Emplea las figuras anteriores, u otras que tú inventes, para continuar el siguiente cuento.

Desde pequeño, Sebastián disfrutaba mirar al cielo en busca de 

y de . Él decía que, cuando fuera grande, construiría un gran…



BLOQUE 5

Aprendizajes esperados

- ✓ Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- ✓ Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- ✓ Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- ✓ Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El arte de la geometría

Las esculturas de la imagen forman parte de la obra *Reloj solar*, del artista polaco Grzegorz Kowalski. A lo largo del día, las sombras de los conos cambian de tamaño y posición, lo que da una sensación de movimiento.

Esta obra es parte de la muestra escultórica Ruta de la Amistad, instalada con motivo de los Juegos Olímpicos de 1968.

1. Mide con una regla un cono de la imagen. Calcula su volumen, suponiendo que la imagen está a escala 1:50.
2. Estas estructuras son bastante grandes. ¿Cómo las construyeron? ¿Cómo las transportaron? Propón una respuesta en equipo.
3. Investiga, con un compañero, qué otras esculturas o edificios están construidos con base en formas cónicas o cilíndricas. Elaboren un cartel con imágenes de ellas y preséntenlo a su grupo.

El escultor mexicano Enrique Carbajal, mejor conocido como Sebastián, utiliza con frecuencia formas geométricas en sus obras. Una de las más conocidas es *El caballito*, ubicado en Paseo de la Reforma, en la Ciudad de México. Para conocer más acerca del trabajo de este escultor entra en…

www.redir.mx/SCM3A-217

Los escultores utilizan con frecuencia cuerpos geométricos en sus obras. Conocer sus dimensiones resulta útil para planear las construcciones, pues permite saber, entre otras cosas, la cantidad necesaria de material, el espacio que ocuparán y su peso final.

En este bloque aprenderás a calcular el volumen de conos y cilindros, y el cambio que sufre su volumen al variar alguna de sus dimensiones.

BLOQUE 5

Secuencia 1 / lección 81

La traducción de los problemas

CONTENIDO Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulo problemas a partir de una ecuación dada

Ya has estudiado ecuaciones de primer grado, de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales. ¿Cuándo se usan unas y cuándo, otras? Para saberlo, hay que interpretar el problema y luego resolver la ecuación que resulte. A eso se referirá esta secuencia de lecciones.

1. **Considera lo siguiente: Pedro tiene *x* años de edad. Escribe, con base en la edad de Pedro, la expresión algebraica correspondiente a cada enunciado.**
   a) Julián tiene tres veces la edad de Pedro. ¿Cuál es la edad de Julián? ____
   b) Luisa tiene cinco años menos que Julián. ¿Cuál es la edad de Luisa? ____
   c) Ricardo tiene cuatro años menos que Pedro. ¿Cuál será la edad de Ricardo en siete años? ____

2. **En una granja hay gallinas, cerdos, conejos y caballos. Escribe la expresión algebraica correspondiente a cada enunciado. Considera *n* como el número de gallinas.**
   a) En la granja hay el mismo número de conejos que de gallinas. ¿Cuántos conejos hay en la granja? ____
   b) El número de cerdos es el doble que el de gallinas. ¿Cuántos cerdos hay? ____
   c) En la granja hay cinco caballos más que el número de gallinas. ¿Cuántos caballos hay? ____
   d) ¿Cuántos animales hay en la granja? ____
   e) Con base en lo anterior, ¿es posible que el total de animales sea 50? ____ Explica por qué. ____

conect@mos

Repasa los problemas con ecuaciones en www.redir.mx/SCM3A-218

Observa con un compañero, los ejemplos planteados en el video. Al finalizar, inventen un problema que se resuelva con ecuaciones.

3. **Manuel tiene *x* pesos, y Pilar, *y* pesos. Formula, en equipo, la ecuación que corresponda a cada enunciado.**
   a) Manuel y Pilar tienen en total \$1 500.00. ____
   b) Manuel tiene tres veces la cantidad de dinero que tiene Pilar. ____
   c) Si Manuel gastara \$375.00, tendría el doble de lo que tiene Pilar. ____
   d) Si Manuel regalara \$375.00 a Pilar, ambos tendrían lo mismo. ____
   e) ¿Cuánto dinero tiene cada uno? ____

- **Compara, con ayuda del profesor, tus expresiones algebraicas con las de tus compañeros. Verifiquen que sean equivalentes; en caso contrario, corrijan lo necesario.**

4. **Trabaja en equipo. Formulen la ecuación con la que se pueda resolver cada problema y escriban la solución.**
   a) Dos familias compraron boletos para el cine. La familia Pérez compró uno para adulto y cuatro para niño, y pagó \$190.00; la familia Sánchez compró dos para adulto y dos para niño, y pagó \$170.00 ¿Cuánto cuesta un boleto para niño?
   b) En otro cine, por un boleto para adulto y uno para niño se paga \$90.00. El boleto para adulto cuesta tres y media veces lo que el boleto para niño. ¿Cuánto cuesta cada boleto?
   c) Pienso un número; le sumo 2.5 y multiplico el resultado por 5; obtengo 20.5. ¿Qué número es el que pensé?
   d) El producto de dos números consecutivos es 702. ¿De qué números se trata?
   e) El producto de dos números es 999; su diferencia, 10. ¿Qué números son?

Ya sabemos...

Cuando decimos *producto* hablamos de multiplicación. Cuando decimos *diferencia* nos referimos a la resta.

- **Hagan, con ayuda del profesor, lo siguiente.**
  a) Analicen las ecuaciones formuladas para cada problema. Si hay errores, corríjanlos.
  b) Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Si no coinciden, averigüen a qué se debe y corrijan lo necesario.

BLOQUE 5

Secuencia 1 / lección 82

De todo un poco

CONTENIDO

Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulo problemas a partir de una ecuación dada

1. **Trabaja en equipo. Elijan la ecuación que resuelva el problema y escriban la solución.**

Por cada operación que Irma hace bien, gana dos puntos; por cada operación que hace mal, pierde uno. Si ella hizo 18 operaciones y obtuvo 15 puntos, ¿cuántas operaciones hizo bien?

$2x + (18 - x) = 15$ $\quad$ $2x - (18 - x) = 15$ $\quad$ $2x + (18 + x) = 15$

2. **Respondan con base en la sucesión de figuras que se muestra a continuación. Consideren que la sucesión continúa de la misma forma.**

Ya sabemos...

La expresión que se busca es la regla general de la sucesión.

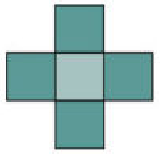


Figura 1

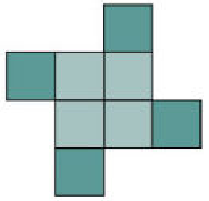


Figura 2

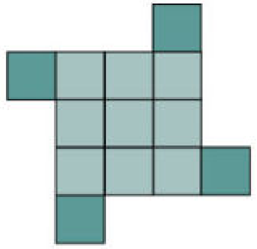


Figura 3

a) ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 12? _______

b) ¿Qué expresión algebraica corresponde al número de cuadrados de la figura n? _______

c) ¿Habrá en la sucesión una figura formada por 175 cuadros? _______ ¿Cómo lo saben?

____

d) Encuentra una cantidad de cuadrados mayor que 100 y que corresponda a la sucesión.

____

Una pista

Puedes formular una ecuación igualando la expresión algebraica a 175 y averiguar si tiene solución entera.

- **Compara los resultados de las actividades anteriores con los de tus compañeros y corrijan lo necesario.**

3. **Encuentra, en equipo, un par de números que satisfaga la ecuación $7x - 2y = 38$, de manera que una de las incógnitas sea el triple de la otra.**

$x =$ _______ $\quad$ $y =$ _______

» ¿Hay más de una solución? _______ Expliquen su respuesta. _______________

____

4. El largo de un rectángulo es 4 cm mayor que el ancho, y su área es 96 cm². ¿Cuánto mide el perímetro?

5. **Trabaja en equipo. Inventen un problema que se resuelva con un sistema de ecuaciones y resuélvanlo.**

Convivimos

Para inventar un problema se requiere analizar qué datos se proporcionarán, la pregunta que se planteará, si el problema tendrá solución, y algunos métodos para llegar a ella. Comenta con un compañero lo que aprendiste en esta actividad.

6. **Trabaja en equipo. Inventen un problema que se resuelva con una ecuación de segundo grado y resuélvanlo.**

- **Intercambien, con otro equipo, los problemas que inventaron. Verifiquen, con ayuda del profesor, que estén bien planteados y que la solución sea correcta.**

7. **Elige, en equipo, la ecuación que resuelva el siguiente problema y escriban la solución.**

Después de comer en un restaurante, ocho personas dividieron la cuenta que debían pagar, que era de $1 300.00, pero tres pagaron $50.00 menos que los demás. ¿Cuánto pagó cada una de las personas que gastó más?

» $8x + 50x = 1\,300$ $\quad$ » $8x - 50x = 1\,300$

» $3x + 5x = 1\,300$ $\quad$ » $3(x - 50) + 5x = 1\,300$

En contexto

Resuelve los acertijos y problemas que se presentan en *Matemáticas recreativas*, de la Biblioteca de Aula.

Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, México, serie SEP-Martínez Roca, serie Espejo de Urania, 2003.

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten cómo identificaron la ecuación que resuelve el problema anterior.**

BLOQUE 5

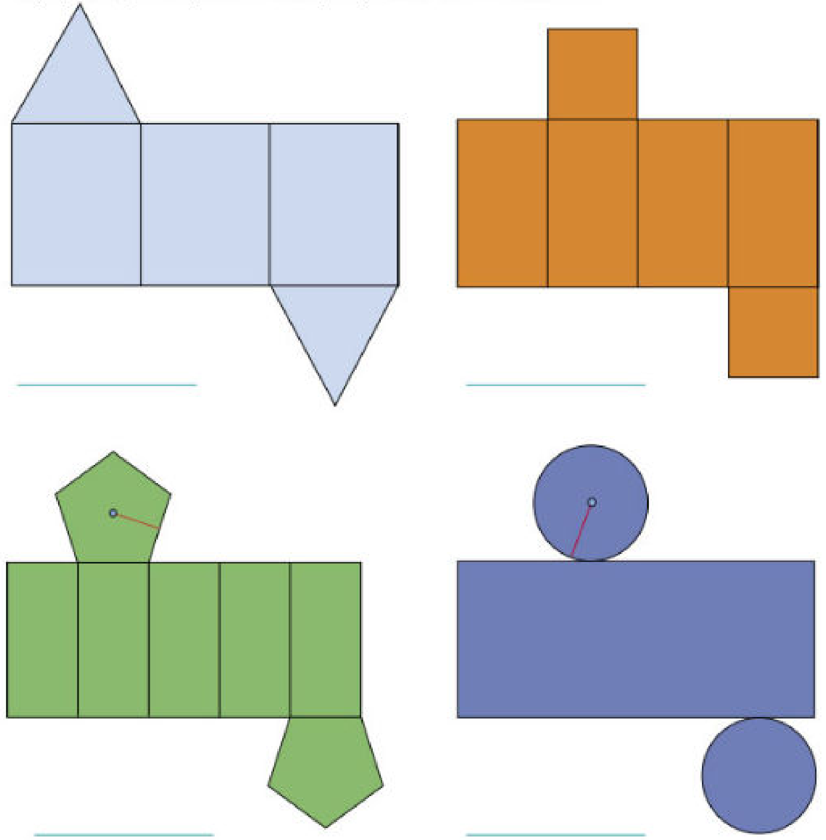
Secuencia 2 / lección 83

El volumen del cilindro

CONTENIDO
Construyo las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

El cilindro y el cono son cuerpos geométricos que se suelen usar en objetos cotidianos. Hay, por ejemplo, latas para envasar alimentos, cubetas de pintura, vasos para tomar agua y barquillos para helado. ¿Cómo se calcula el volumen de un cilindro? ¿Y el de un cono? ¿Qué relación hay entre estos cuerpos? Esta secuencia tratará dichos temas.

1. Las siguientes plantillas sirven para construir diversos prismas y un cilindro. Trabaja en equipo. Hagan lo que se indica y respondan en su cuaderno.



a) Anoten bajo cada plantilla el nombre del cuerpo que se forma.
b) ¿Cuánto debe medir el radio de la circunferencia de la plantilla?
c) Calculen el volumen de tres cuerpos que se formen con las plantillas. Tomen las medidas necesarias.
d) ¿Cómo se calcula el volumen del cilindro?

* Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados. En particular, mencionen cómo se calcula el volumen de un cilindro.

conect@mos

Recuerda cómo calcular el volumen de prismas y pirámides en

www.redir.mx/SCM3A-222

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, compara y valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas.

Ya sabemos...

El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

2. Lee, en equipo, la siguiente información.

Para calcular el volumen de un cilindro se usa el mismo procedimiento que para calcular el de un prisma, es decir, se multiplica el área de la base por la altura. En el caso del cilindro, la base es un círculo; por tanto, su volumen se calcula de la siguiente manera.

$$V = \pi r^2 h$$

Es importante recordar que, al multiplicar π por radio al cuadrado, se obtiene el área del círculo.

3. En la fórmula para calcular el volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, intervienen tres medidas que pueden variar y un valor constante, es decir, un valor que no cambia. Contesten lo siguiente.

a) ¿Cuál es el valor constante? ____________________

b) Si el volumen de un cilindro es 198 cm^3 y el radio, 3 cm, ¿cuánto mide la altura?

____

c) Si el volumen de un cilindro es 196.3 cm^3 y la altura, 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la base? ____________________

d) Completen, con base en la fórmula para calcular el volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, las siguientes fórmulas.

$h =$ __________ $r^2 =$ __________

$r =$ __________

Ya sabemos...

La operación inversa de elevar al cuadrado es la raíz cuadrada.

4. Respondan las siguientes preguntas; usen la fórmula del volumen del cilindro.

a) ¿Cómo cambia el volumen si el radio de la base se duplica?

____

b) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica?

____

c) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica y el radio de la base se divide entre 2?

____

* Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas de las actividades 3 y 4 con las del grupo. En particular, comprueben si todos despejaron correctamente las variables h, r^2 y r de la fórmula para calcular el volumen del cilindro.

BLOQUE 5

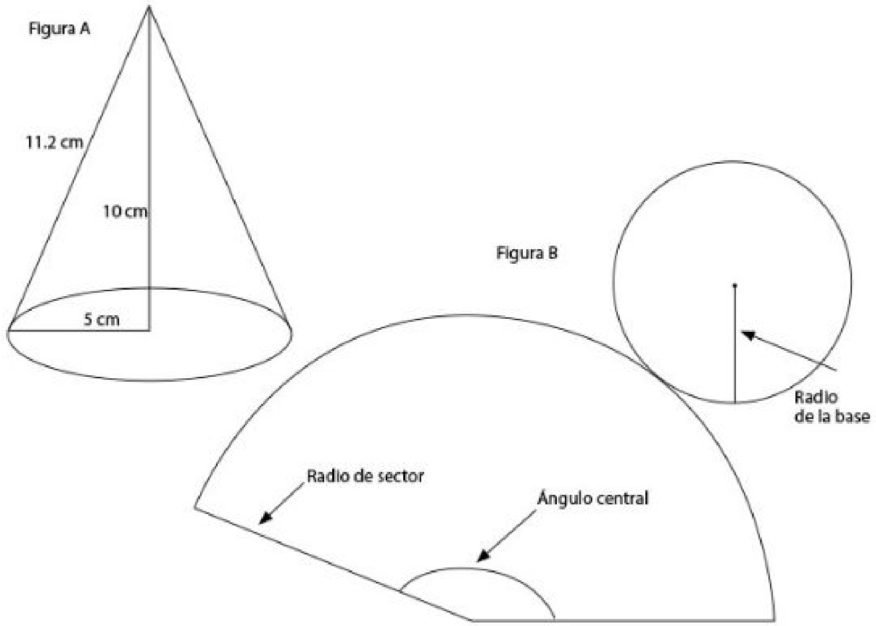
Secuencia 2 / lección 84

Un cono a la medida

CONTENIDO

Construyo las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

1. Trabaja en equipo. Se quiere elaborar un cono con las medidas que se muestran en la figura A . Para ello, se necesita una plantilla similar a la figura B . Contesten las preguntas. Consideren el valor de π como 3.14.



a) ¿Cómo se obtuvo la medida 11.2 cm? ______

b) ¿Cuánto debe medir el radio del sector de la plantilla? ______ ¿Por qué? ______

______

c) ¿Y el ángulo central de la plantilla? ______

Una pista

La parte de circunferencia que corresponde al ángulo central mide lo mismo que la circunferencia de la base del cono, cuyo radio mide 5 cm.

Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las de sus compañeros. En particular, verifiquen si todos calcularon correctamente la medida del ángulo central de la plantilla. Si hay diferencias considerables, averigüen quién tiene razón y corrijan lo necesario.

2. Trabaja en equipo. Consideren las medidas de la actividad anterior.

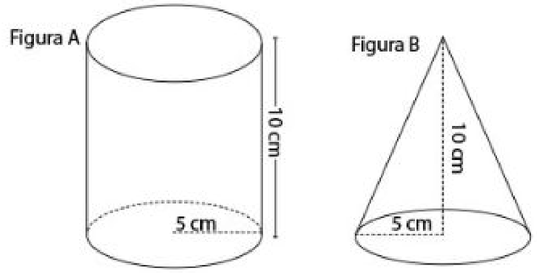
a) Tracen la plantilla para elaborar el cono.

b) Recórtenla y armen el cono.

c) Verifiquen que la altura del cono mida 10 cm y el diámetro de la base, 10 cm.

3. Hagan lo siguiente.

a) Tracen en una hoja blanca una plantilla para elaborar un cilindro con las medidas que se indican en la figura A.



b) Recórtenla y armen el cilindro.

c) Verifiquen que el cono y el cilindro que elaboraron en la actividad anterior tengan la misma base y la misma altura.

d) ¿Cuál es el volumen del cilindro? ______

e) Utilicen el cono como unidad de medida. Para medir, consigan arena, arroz o algún material similar. ¿Con cuántos conos se llena un cilindro si ambos recipientes tienen la misma base y la misma altura? ______

f) La fórmula para calcular el volumen de un cilindro es $V = (\pi r^2)h$, o bien, $V = Ah$. Considerando que A representa el área de la base y h, la altura, ¿cuál es la fórmula para calcular el volumen del cono? ______

g) ¿Cuál es el volumen del cono de la figura **B**? ______

h) ¿Cuánto debería medir la altura del cono (figura **B**) para que su volumen fuera igual al del cilindro (figura **A**)? ______

Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las de sus compañeros. En particular, comprueben si plantearon la misma fórmula para calcular el volumen de un cono.

4. Contesta, en equipo, lo siguiente.

» Un cilindro y un cono tienen la misma altura, pero el radio del cono mide el triple que el del cilindro. ¿Cómo se relacionan los volúmenes de ambos cuerpos? ______

______

conect@mos

Descarga la actividad relacionada con conos y pirámides en

www.redir.mx/SCM3A-225

Haz la actividad propuesta y contesta las preguntas. Al finalizar, explica en tu cuaderno por qué la fórmula para calcular el volumen de un cono es tan parecida a la del volumen de una pirámide.

Reflexionamos

Si un cilindro y un cono tienen bases idénticas, ¿qué relación deben tener sus alturas para que sus volúmenes sean iguales? Ejemplifica con valores numéricos.

BLOQUE 5

Secuencia 3 / lección 85

Cortes con formas inesperadas

CONTENIDO

Analizo las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto. Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

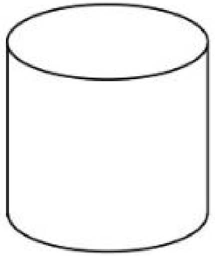
Si tienes un queso con forma de cilindro y lo cortas a la mitad, por el diámetro de una de sus bases, ¿qué figura geométrica se forma en la sección de corte? Y si tienes un cono y lo cortas en un plano paralelo a su base, ¿qué figura geométrica se forma en la sección de corte? ¿Cómo calcularías las medidas de esa figura geométrica?

1. Consigue plastilina y una tarjeta de plástico para efectuar las actividades de esta lección.

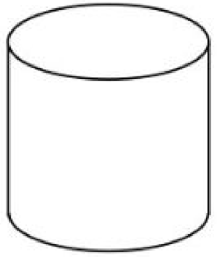
   a) Dibuja en los recuadros inferiores la sección de corte que se obtiene al cortar un cilindro como se indica en las imágenes de abajo.

   b) Corta un cilindro de plastilina para verificar que tus dibujos sean correctos.

2. Traza en los cilindros una línea donde supongas que se deba cortar para obtener la sección que se indica abajo. Verifica tus respuestas cortando un cilindro de plastilina.



Sección con forma de rectángulo



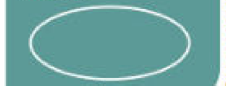
Sección con forma de elipse

En contexto

Los planetas siguen una órbita en forma de elipse alrededor del Sol.

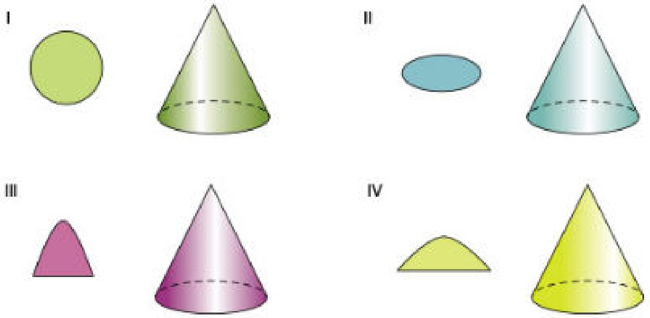
Ya sabemos...

Una elipse es una curva cerrada con forma parecida a un óvalo, y tiene dos ejes de simetría.



3. Imagina que cortas un cono de plastilina con la tarjeta.

   a) En cada caso, las figuras de la izquierda representan una sección de corte. Traza una línea donde se deba cortar cada cono para obtener la sección indicada.



   b) Corta un cono de plastilina siguiendo tus respuestas, con el fin de verificarlas.

* Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Después comenten la siguiente información e ilústrenla en su cuaderno con algunos ejemplos.

Las curvas que se obtienen al cortar de diferentes maneras un cono reciben el nombre de **cónicas**. En los casos I y II se forman la **circunferencia** y la **elipse**; en el caso III, la curva de la sección de corte es una **parábola**; y en el IV, una **hipérbola**.

Verifiquen que hayan obtenido la parábola y la hipérbola de la siguiente manera.

Parábola: la tarjeta debe colocarse de forma paralela a la generatriz.

Hipérbola: la tarjeta debe colocarse de forma perpendicular a la base.

4. Trabaja en equipo. Consideren que se cortará una esfera.

   a) ¿Qué tipo de figura se forma en la sección de corte? ______

   b) ¿Podrían obtener una elipse en la sección de corte? ______

   c) ¿Cómo hay que cortar la esfera para obtener, en la sección de corte, el círculo con la mayor dimensión posible?

______

conect@mos

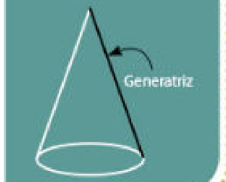
Aprende más acerca de las secciones cónicas en

www.redir.mx/SCM3A-227

Observa el video. Comenta, en grupo y con ayuda del profesor, qué relación hay entre una hipérbola y sus asíntotas.

Ya sabemos...

La generatriz de un cono es un segmento que une el vértice con un punto de la circunferencia de la base.



Recipientes cónicos

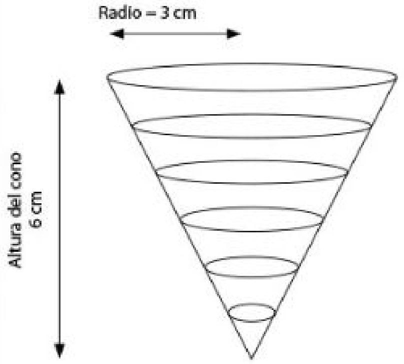
CONTENIDO: Analizo las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto. Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Una pista

Busca triángulos semejantes que se formen con cortes paralelos a la base del cono.

1. Considera un cono de papel. Completa la tabla calculando la medida del radio del círculo que se forma al cortar el cono de manera paralela a la base, en la altura indicada.

Altura del corte a partir del vértice (cm)	Radio del círculo que se forma (cm)
1	
2	
3	
4	
5	
6	3

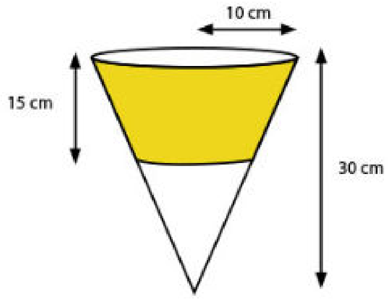


a) Demuestra con un ejemplo que las cantidades de la tabla se relacionan proporcionalmente. ______

b) ¿Por qué sucede esto? ______

2. Se elaboró un recipiente en forma de cono truncado a partir de un cono con las medidas que se indican en la siguiente figura. ¿Cuál es la capacidad del recipiente?

______



Ya sabemos...

El volumen del cono se calcula multiplicando el área de la base por la altura y dividiendo el resultado entre 3. Además, recuerda que 1 cm^3 equivale a un mililitro.

3. Una copa tiene forma de cono. La base de éste mide 4 cm de radio y su altura, 7 cm.

a) ¿Cuánta bebida tiene la copa si faltó 1 cm de altura para llenarla? ______

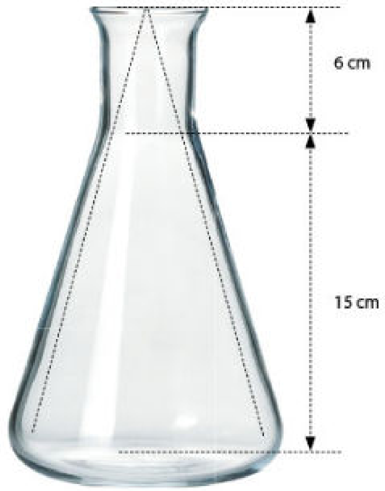
b) ¿Cuál es el radio del círculo que forma la superficie del líquido?

______

4. Se tiene un cono de 12 cm de altura y 7 cm de diámetro en la base. Mediante un corte se obtendrá un cono más pequeño. Si se pretende que el diámetro de la base del cono pequeño sea de 5 cm, ¿a qué altura se debe hacer el corte?

______

5. Considera el siguiente matraz cónico.



En contexto

El matraz con forma cónica se llama matraz de Erlenmeyer porque fue inventado por Emil Erlenmeyer en 1861. Es muy útil cuando se desea controlar la evaporación de líquidos.

a) Observa que, a la altura de 15 cm, inicia una parte cilíndrica. El radio de la base del matraz es de 5 cm. ¿Qué capacidad tiene el recipiente sin considerar su parte cilíndrica?

______

b) Explica cómo la calculaste. ______

* Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros. Al finalizar, retomen las preguntas de la introducción de la secuencia y respóndanlas de manera grupal.

Volúmenes y capacidades

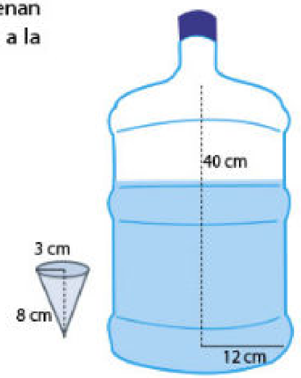
CONTENIDO

Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

¿Cuánta agua le cabe a un vaso cilíndrico? ¿Y a uno de papel con forma de cono? ¿A cuál recipiente le cabe más líquido: a uno con forma de prisma o a uno con forma de cilindro? ¿En cuál de los dos recipientes anteriores se ocupa menos material al fabricarlo? Al estudiar esta secuencia, serás capaz de responder las preguntas planteadas.

1. Reúnete en equipo para responder cuántos vasos se llenan con el agua de un garrafón. Los 8 cm corresponden a la altura del vaso.

______



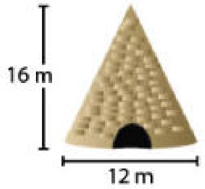
Ya sabemos...

1 cm^3 equivale a 1 ml.

2. Anota en la tabla las posibles medidas de una lata cilíndrica con capacidad para envasar un cuarto de litro de jugo.

	Altura	Radio de la base	Volumen (en cm^3)	Capacidad (en litros)
Lata				$\frac{1}{4}$ l

3. Para almacenar granos, suele utilizarse un silo.



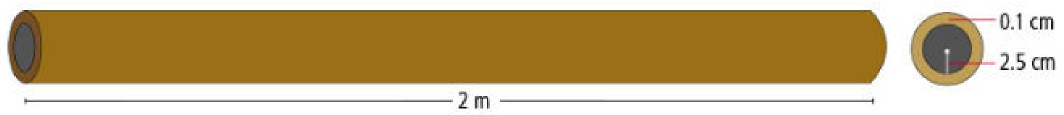
Considerando que en un viaje un camión puede trasladar 24 m^3 de maíz. ¿En cuántos viajes se llenaría el silo? ______

En contexto

Un silo es una estructura que se utiliza para almacenar granos y otros recursos a granel. Los silos más comunes tienen forma cilíndrica, pero los hay cónicos o esféricos.

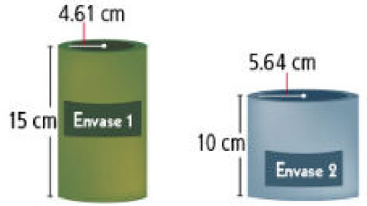
- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las de tus compañeros. Si hay diferencias, localicen los errores y corrijan lo necesario. Luego planteen otras preguntas relacionadas con los problemas anteriores, por ejemplo: ¿cuál sería el volumen del silo si éste fuera cilíndrico?

4. Se sabe que 1 centímetro cúbico de cobre pesa 9 gramos. ¿Cuánto pesa un tubo de cobre como el que se muestra a continuación?



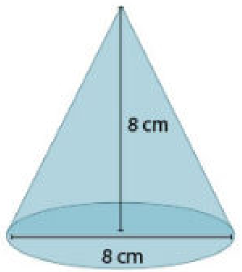
El tubo pesa ______

5. Un fabricante desea producir un envase cilíndrico de cartón. Dos empleados le propusieron los siguientes recipientes.



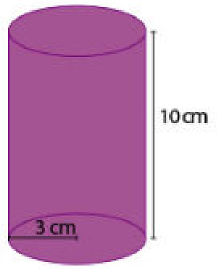
» El fabricante elegirá el envase que requiera menos material para ser fabricado. Si en ambos casos el cartón es del mismo grosor, ¿qué envase le conviene producir? ______

6. Analiza la siguiente figura. Ésta representa un pisapapeles de vidrio.



a) Un centímetro cúbico de vidrio pesa 2.5 g. Estima, sin hacer cálculos precisos, cuánto pesa un pisapapeles cónico como el que se muestra arriba. ______

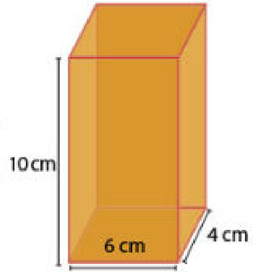
b) Haz los cálculos para saber qué tan buena fue tu estimación.



7. Trabaja en equipo. Respondan con base en el cilindro y el prisma de la derecha.

a) ¿A qué envase le cabe más líquido? ______

b) ¿En cuál se ocupa más material al fabricarlo? ______



- Comparen sus resultados. Si hay diferencias, identifiquen si se deben al procedimiento empleado o a errores de cálculo; en todo caso, corríjanlos.

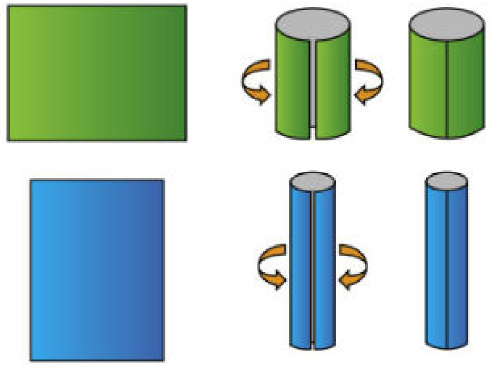
BLOQUE 5

Secuencia 4 / lección 88

Cilindros y conos imaginarios

CONTENIDO
Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

1. Consigue una hoja de papel tamaño carta. Con ella elaborarás dos cilindros diferentes.



a) Completa la siguiente tabla.

	Cilindro verde	Cilindro azul
Altura del cilindro		
Radio de la base		
Volumen		

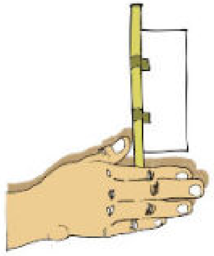
b) ¿Qué cilindro tiene mayor volumen? ____________

* Comenta, en grupo, cómo hiciste los cálculos. En particular, mencionen cómo calcularon el radio de la base de los cilindros.

2. Para efectuar esta actividad, necesitarás un rectángulo de 5 cm de ancho por 6 cm de largo. Gíralo tomando como eje de giro, primero, el lado de 5 cm y, después, el de 6 cm.

a) ¿En qué caso se genera el cilindro de mayor volumen? ____________

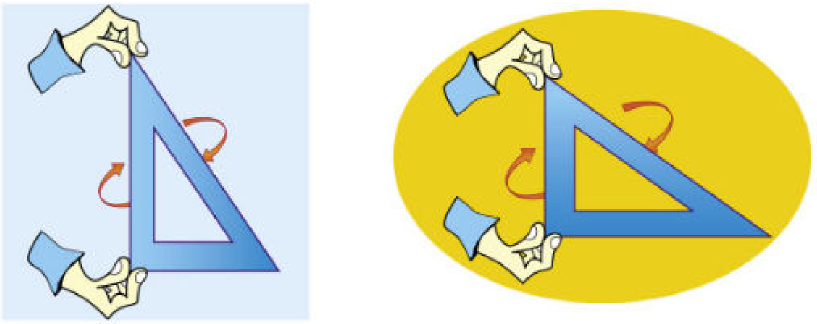
b) Si hicieras con cartulina el molde de los cilindros que se crearon, ¿para cuál ocuparías más material? ____________



c) ¿Cuál es el volumen del primer cilindro? ____________

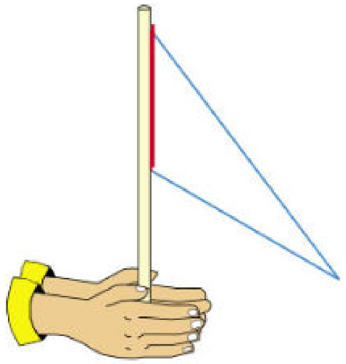
d) ¿Y el del segundo? ____________

3. Para efectuar esta actividad, necesitarás la escuadra en forma de triángulo escaleno. Gírala tomando como eje de giro el cateto mayor. Haz lo mismo para el cateto menor.



¿Cuál cono, de los dos generados, tiene mayor volumen? ____________

4. Imagina que giras el siguiente triángulo obtusángulo tomando como eje de giro el lado rojo. Dibuja a la derecha de la figura el cuerpo que se generaría.



a) Describe el cuerpo que se generaría. ____________

b) Calcula el volumen de dicho cuerpo. Explica qué datos usaste para hacerlo y cómo los obtuviste. ____________

* Compara tus resultados y procedimientos con los de tus compañeros. Verifiquen, en particular, que el cuerpo de la actividad 4 corresponda a un cono al que se le quita, en la parte inferior, un cono de igual base, pero con menor altura.

Convivimos

Elabora un mapa mental en el que señales lo que aprendiste acerca de los conos y cilindros, y compáralo con el de tus compañeros. Después agrega a tu mapa la información importante que no habías considerado.

conect@mos

Calcula más volúmenes de conos y cilindros en

www.redir.mx/SCM3A-233

Haz las actividades propuestas. Al finalizar, comenta con el grupo y el profesor qué dificultades tuviste al resolverlas.

BLOQUE 5

Secuencia 5 / lección 89

Cantidades que cambian y se relacionan

CONTENIDO

Analizo situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

En la vida real hay muchos ejemplos de cantidades que cambian y se relacionan. Con frecuencia, esas relaciones se pueden expresar mediante una fórmula.

1. **Analiza, en equipo, el siguiente problema. Después hagan lo que se indica.**

   Doña Juana vende tamales en el mercado. El precio de venta de cada tamal es de \$10.00, y su costo de producción, \$6.50. Sin embargo, ella debe pagar \$150.00 diarios por el alquiler del espacio donde los vende.

   a) ¿Cuánto obtiene de ganancia si en un día vende 50 tamales? ______

   b) ¿Doña Juana puede tener pérdida en lugar de ganancia después de la venta de un día? ______ ¿Por qué? ______

   c) Escriban una fórmula que permita a doña Juana calcular la ganancia o pérdida para cualquier cantidad de tamales vendidos. ______

   d) Usando la fórmula anterior, contesten: ¿a partir de qué cantidad de tamales vendidos empieza a tener ganancia? ______

   e) ¿Cuántos tamales debería vender para ganar \$375.00? ______

* **Comparen, con ayuda del profesor, sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen, en particular, las fórmulas que escribieron y anoten ejemplos para los siguientes casos.**

   » Fórmulas iguales pero con distintas literales: ______

   » Fórmulas exactamente iguales: ______

   » Fórmulas equivalentes: ______

   » Fórmulas erróneas, es decir, que no relacionan adecuadamente los datos: ______

2. **Trabaja en equipo. La Copa Mundial de Futbol se juega cada cuatro años. En 1986 se llevó a cabo en México. Contesten lo siguiente.**

   a) Suponiendo que este torneo se siga jugando cada cuatro años, ¿habrá Copa Mundial en el año 2040? ______ ¿Por qué? ______

   b) En 1986 se jugó en México la decimotercera (13ª) Copa Mundial de Futbol. ¿En qué año tendrá lugar la trigésima (30ª)? ______

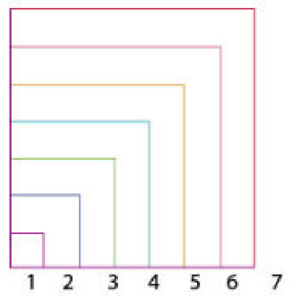
   c) Subrayen la fórmula que permita calcular el año (A) en que se jugará la enésima Copa Mundial. Después, usen esa fórmula para validar sus respuestas anteriores.

   $A = 4(n + 13) + 1986$ $\qquad$ $A = 4(n + 13) - 1986$

   $A = 4(n - 13) - 1986$ $\qquad$ $A = 4(n - 13) + 1986$

* **Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los del resto del grupo. Comenten, en particular, cuál es la manera más eficiente para saber si habrá Copa Mundial en el año 2094.**

3. **La siguiente figura está formada por varios cuadrados. Supongamos que el cuadrado 1 mide 0.25 m de lado; el 2, 0.5 m de lado; el 3, 0.75 m de lado; y así sucesivamente. Haz, en equipo, lo que se indica.**



   a) ¿Cuál es el perímetro del cuadrado 1? ______

   b) ¿Y el del 4? ______

   c) ¿Qué cuadrado mide 2.25 m² de área? ______

   d) Escriban una expresión algebraica que permita calcular el área del enésimo cuadrado.

   A = ______

* **Comparen, con ayuda del profesor, sus resultados con los del resto del grupo. Usen la expresión algebraica que anotaron en el inciso d) para calcular el área del cuadrado número 30.**

conect@mos

Descarga la actividad de variación entre dos conjuntos de cantidades en www.redir.mx/SCM3A-235

Trabaja en equipo. Hagan la actividad propuesta y contesten las preguntas. Al finalizar, comenten con el resto del grupo por qué la gráfica que obtuvieron no es una línea recta.

BLOQUE 5

Secuencia 5 / lección 90

Índice de Masa Corporal

CONTENIDO Analizo situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

En contexto

Conoce aplicaciones de las matemáticas en diversas situaciones cotidianas o relacionadas con otras disciplinas en *El piropo matemático: de los números a las estrellas*, de la Biblioteca de Aula.

Régules, Sergio de, et al., *El piropo matemático: de los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum, serie Espejo de Urania, 2003.

1. En la siguiente tabla se muestra el peso de cuatro personas. Dos tienen peso normal y las otras, peso insuficiente, sobrepeso u obesidad.

	Claudia	Arturo	Miranda	Felipe
Peso	50 kg	55 kg	76 kg	70.5 kg

a) Sólo con esta información, ¿puedes decir quiénes tienen peso normal? Si consideras que sí, escribe quiénes lo tienen; si consideras que no, explica qué información falta.

b) A continuación se muestran las estaturas de las mismas cuatro personas.

	Claudia	Arturo	Miranda	Felipe
Estatura	1.60 m	1.75 m	1.80 m	1.56 m

» Con esta nueva información, ¿quiénes consideras que son las dos personas con peso normal? ____________

2. El Índice de Masa Corporal (IMC) es una medida que relaciona el peso y la talla de una persona; se utiliza, entre otras cosas, para evaluar su estado nutricional. Se calcula mediante la siguiente fórmula, donde E representa la estatura en metros y P, el peso en kilogramos.

$$\text{IMC} = \frac{P}{E^2}$$

En la tabla se registran los rangos, determinados por la Organización Mundial de la Salud, en los que una persona es considerada con bajo peso, peso normal, sobrepeso u obesidad.

IMC	La persona se considera con…
Menos de 18.5	Peso insuficiente
Entre 18.5 y 24.9	Peso normal
Entre 25 y 29.9	Sobrepeso
A partir de 30	Obesidad

a) Determina el índice de masa corporal y el rango en qué se encuentran las personas de la actividad 1.

	Claudia	Arturo	Miranda	Felipe
IMC				
La persona se considera con…				

b) Calcula el peso de las siguientes personas. Ten en cuenta que todas tienen un IMC mayor a 25, es decir, tienen sobrepeso u obesidad.

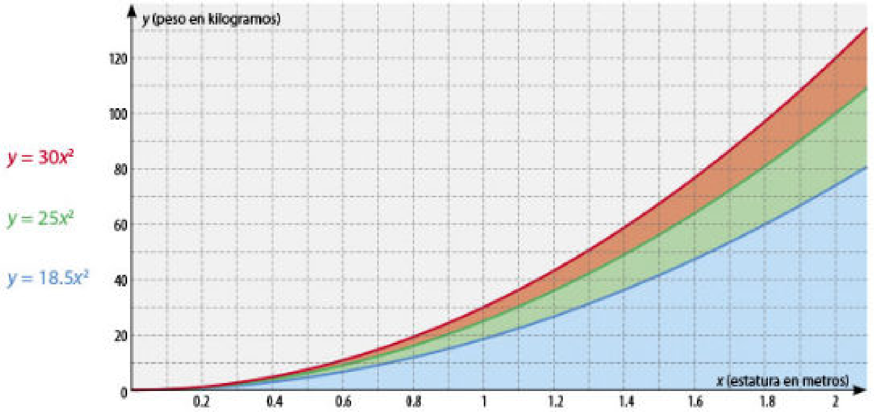
	Sandra	Eva	Alfredo	Manuel	Guillermina
Estatura	1.57 m	1.80 m	1.65 m	1.72 m	1.45 m
IMC	27	31	28.5	30	25.5
Peso					

c) Subraya la fórmula que sirve para calcular el peso de una persona.

$P = (\text{IMC})E^2$ $\quad P = (\text{IMC})E$ $\quad P = \frac{\text{IMC}}{E^2}$ $\quad P = \frac{\text{IMC}}{E}$

d) Propón, para las personas del inciso b), un peso con el cual estarían en el rango normal.

3. Un nutriólogo entrega a sus pacientes una gráfica como la siguiente, que sirve para saber, sin hacer cálculos, en qué rango de peso se encuentra una persona.



a) Señala en la gráfica, por medio de puntos, dónde se ubican las personas de la actividad 2.

b) ¿Qué significa que un punto esté situado en la parábola roja? ____________

c) ¿Y en la región verde? ____________

d) Un paciente de 1.67 m de estatura inició un tratamiento contra el sobrepeso. A lo largo de cinco consultas ha registrado los siguientes pesos.

Consulta 1	Consulta 2	Consulta 3	Consulta 4	Consulta 5
70 kg	68 kg	62.5 kg	56 kg	51.5 kg

» ¿Qué tipo de recomendación debería hacer el médico? Responde en tu cuaderno.

* **Compara, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. En particular, comenten la manera en que dedujeron el significado de las parábolas de la actividad 3.**

conect@mos

Encuentra una calculadora del IMC en www.redir.mx/SCM3A-237

Usa la herramienta para validar tus respuestas de esta lección.

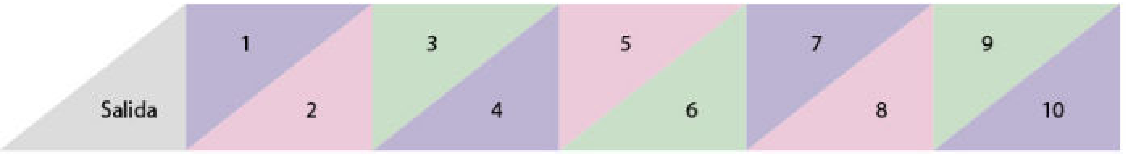
Secuencia 6 / lección 91

Juegos equitativos I

CONTENIDO
Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

¿Alguna vez te has preguntado si las reglas de un juego son justas? En esta secuencia analizarás las condiciones necesarias para garantizar que, en un juego de azar, todos los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar.

1. Consigue un par de dados y tres fichas pequeñas. Reúnete con dos compañeros para jugar carrera a 10. Lean las instrucciones del juego y, antes de empezar a jugar, respondan el inciso a).



» Los tres jugadores, A, B y C, colocan su ficha en la casilla de salida.

» Uno de los jugadores (no importa cuál) lanza los dos dados simultáneamente. Si ambos caen en número par, el jugador A avanza una casilla; si ambos caen en número impar, el jugador B avanza una casilla; si un dado cae en número par y el otro, en impar, el jugador C avanza una casilla.

» Después de que avance el jugador al que le haya correspondido hacerlo, se pasan los dados a otro jugador y se repite el procedimiento anterior. Gana el primero que llegue a la casilla 10.

a) Discutan si alguno de los jugadores tiene alguna ventaja. Anoten sus conclusiones.

____

b) Acuerden quién será el jugador A, y quiénes, el B y el C. Si dos o más integrantes del equipo desean ser el mismo jugador, decídanlo con un volado o disparejo.

c) Empiecen el juego. Al terminar, numeren los distintos equipos y llenen, con ayuda del profesor, una tabla como la siguiente con los resultados del grupo.

	Cantidad de casillas avanzadas				
	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	...	Total
Jugador A					
Jugador B					
Jugador C					

d) ¿En cuántos equipos ganó el jugador A? _____ ¿Y el B? _____ ¿Y el C? _____

e) Calculen la probabilidad que tienen los jugadores de avanzar en cada lanzamiento.

Jugador A: _________ Jugador B: _________ Jugador C: _________

* **Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Verifiquen si los resultados del juego concuerdan o no con sus conclusiones del inciso a) y las probabilidades del inciso e). Después comenten la siguiente información.**

El juego carrera a 10 **no es un juego justo** pues, aunque cualquiera de los jugadores puede ganar, **el jugador C tiene ventaja**, ya que en cada tirada **su probabilidad de avanzar es de $\frac{1}{2}$**, mientras que, para **los jugadores A y B, la probabilidad es de $\frac{1}{4}$** en ambos casos.

2. **Propongan un método para que el juego carrera a 10 sea justo. Pueden agregar nuevas reglas o modificar alguna existente.**

____
____
____

* **Comenten, con el resto del grupo, las propuestas de los distintos equipos. Discutan si con esas modificaciones el juego es justo o no.**

3. **Analiza las siguientes modificaciones para el juego carrera a 10. Explica en tu cuaderno si con esas reglas el juego es justo o no.**

a) Modificar las reglas para avanzar: si ambos dados caen en número par, el jugador A avanza 2 casillas; si ambos caen en impar, el B avanza 2 casillas; si un dado cae en par y el otro, en impar, el C avanza 1 casilla.

b) Modificar las reglas para avanzar: si ambos dados caen en número par, el jugador A avanza 3 casillas; si ambos caen en impar, el B avanza 3 casillas; si un dado cae en par y el otro, en impar, el C avanza 1 casilla.

c) Modificar las reglas para avanzar: si la suma de ambos dados es 2, 3 o 4, el jugador A avanza 1 casilla; si la suma es 7, el B avanza 1 casilla; si la suma es 11 o 12, el C avanza 2 casillas.

d) Mantener las mismas reglas para avanzar, pero ampliar el tablero para que el jugador C deba llegar hasta la casilla 20.

e) Mantener las mismas reglas para avanzar, pero que los jugadores A y B ganen al llegar a la casilla 5.

* **Comenta, con el grupo, tus respuestas de la actividad anterior. Expliquen, en particular, por qué la propuesta del inciso c) hace que el juego sea justo, pero más lento.**

BLOQUE 5

Secuencia 6 / lección 92

Juegos equitativos II

CONTENIDO: Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

En contexto

En *Una ventana a la incertidumbre*, de la Biblioteca Escolar, se presentan diversas situaciones de probabilidad y se revisan los problemas que originaron esta rama de las matemáticas.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a la incertidumbre*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2002.

1. Kathya y Aldo jugarán "disparejo" lanzando monedas.

   » Ambos jugadores inician el juego sin fichas.
   » Uno de los jugadores (no importa cuál) lanza varias monedas simultáneamente. Si las monedas coinciden, es decir, si todas caen en águila o todas caen en sol, Kathya recibe una ficha; si las monedas no coinciden, es decir, si al menos una cae en águila y la otra, en sol, Aldo recibe una ficha.
   » Gana el primer jugador que consiga 32 fichas.

   a) Aldo propone jugar con tres monedas. ¿Le conviene a Kathya la propuesta? ________

   Explica por qué. ________________________________

   b) ¿Con cuántas monedas el juego es justo? ________

   Explica por qué. ________________________________

2. Trabaja en equipo. Calculen y anoten, para cada jugador, la probabilidad de obtener una ficha si se lanzan las monedas indicadas.

Se lanzan…	2 monedas	3 monedas	4 monedas	5 monedas
Probabilidad de que Kathya gane una ficha				
Probabilidad de que Aldo gane una ficha				

3. Determinen, a partir de los resultados de la tabla anterior, en qué casos el juego es justo y en cuáles no. En los casos en que no lo sea, modifiquen las reglas del juego para hacerlo justo.

	¿El juego es justo?	Modificaciones para hacerlo justo
Con 2 monedas		
Con 3 monedas		
Con 4 monedas		
Con 5 monedas		

* Revisen, con el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de las tres actividades anteriores. Asegúrense de que todos concuerden en qué juegos son justos y cuáles no. Después comparen las distintas propuestas que formularon para que todos los juegos fueran justos.

4. Completa las modificaciones para hacer que el juego sea justo en cada inciso.
   Cada vez que las monedas no coinciden, Aldo gana una ficha; y…

   a) si se lanzan dos monedas y ambas coinciden, Kathya gana ________ fichas.

   b) si se lanzan tres monedas y todas coinciden, Kathya gana ________ fichas.

   c) si se lanzan cuatro monedas y todas coinciden, Kathya gana siete fichas.

   d) si se lanzan cinco monedas y todas coinciden, Kathya gana ________ fichas.

* Lean, con ayuda del profesor, la siguiente información. Después revisen nuevamente las propuestas que hicieron en la actividad 2 de la lección anterior, y en las actividades 3 y 4 de esta lección.

El juego carrera a 10, expuesto en la lección anterior, no es justo, pues el jugador C tiene mayor probabilidad de avanzar que los jugadores A y B. Una manera de hacerlo justo es que A y B avancen dos casillas en lugar de una pues, como las probabilidades de avanzar de A, B y C son $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente, se espera que, por ejemplo, en 20 lanzamientos suceda lo siguiente.

» Que en cinco ocasiones (la cuarta parte de 20) ambos dados caigan en número par; así, el jugador A avanzaría 10 casillas en total.
» Que en cinco ocasiones (la cuarta parte de 20) ambos dados caigan en número impar; así, el jugador B avanzaría 10 casillas en total.
» Que en 10 ocasiones (la mitad de 20) un dado caiga en número impar y el otro, en impar; así, el jugador C avanzaría 10 casillas en total.

Esto no quiere decir que los tres jugadores avancen siempre igual, sino que todos tienen la misma probabilidad de ganar, es decir, el juego es justo.

5. Julián y Alfonso tienen, cada uno, una caja con pelotas: algunas son rojas y otras, azules. Cada uno sacará una pelota de su caja. Si ninguna es roja o ambas lo son, las vuelven a meter a las cajas y el juego continúa; si una es roja y la otra no, gana el jugador que haya sacado la pelota roja.
   a) Sugiere una cantidad distinta de pelotas (rojas y azules) para cada caja, de manera que el juego sea justo.
   b) Sugiere una cantidad distinta de pelotas para cada caja, de manera que uno de los jugadores tenga ventaja.
   c) Sin cambiar la cantidad de pelotas que sugeriste para cada caja en el inciso b), modifica las reglas del juego para que éste sea justo.

* Compara, en grupo y con ayuda del profesor, las propuestas de la actividad anterior. En particular, comenten si el juego es justo cuando la caja de algún jugador no tiene pelotas rojas.

Convivimos

Una notación y un vocabulario adecuados permiten comunicar de manera clara las ideas matemáticas. ¿Decir que un juego es justo es lo mismo que decir que es parejo? Comenta tu respuesta con un compañero y lleguen a una conclusión común.

conect@mos

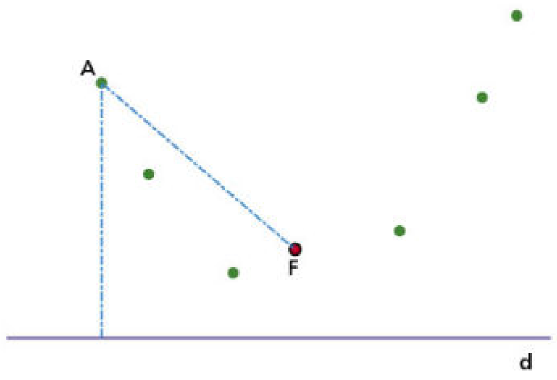
Descarga la actividad de juegos justos e injustos en

www.redir.mx/SCM3A-241

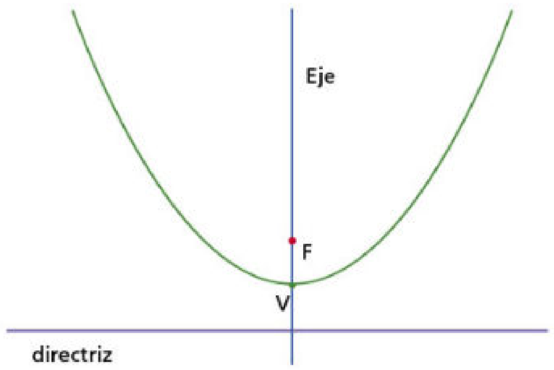
Haz, en equipo, la actividad propuesta y respondan las preguntas. Al final, comparen, en grupo y con ayuda del profesor, las modificaciones que harían al juego para que sea justo.

Reflectores parabólicos

En el siguiente diagrama…



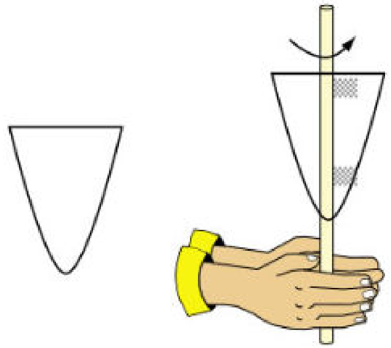
- El punto **A** está a la misma distancia del punto **F** y de la recta **d**. Verifícalo midiendo con tu regla los segmentos punteados.
- Los demás puntos también están a la misma distancia del punto **F** y de la recta **d**. Verifícalo con tu regla.
- Marca otros tres puntos que estén a la misma distancia del punto **F** y de la recta **d**.



Si continuaras marcando más puntos que estén a la misma distancia de la recta **d** y del punto **F**, ¡notarías que todos los puntos forman una parábola como las que graficaste con las expresiones de segundo grado!

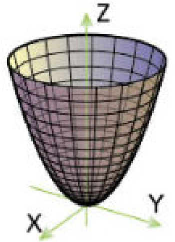
El punto **F** se llama *foco de la parábola* y la recta **d** se llama *directriz*. El eje de simetría de la parábola es una recta perpendicular a la directriz que pasa por el vértice y por el foco.

- Señala tres puntos sobre la parábola y verifica que el foco y la directriz sean equidistantes respecto a cada punto.



- ¿Recuerdas que al girar un círculo se genera una esfera? Recorta una superficie que tenga un lado curvo, en forma de parábola, y un lado recto (como la del dibujo), pega un popote en el eje de giro y hazla girar.

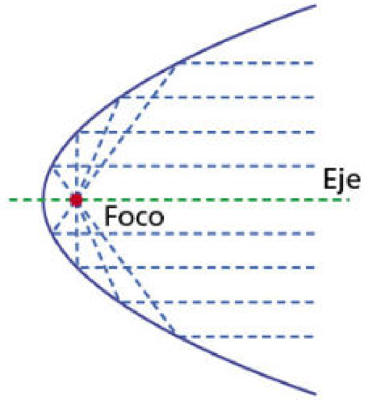
El cuerpo que se genera es un sólido de revolución que recibe el nombre de *paraboloide de revolución*.



Las parábolas y los paraboloides de revolución tienen una propiedad importante relacionada con la luz; ésta se describe a continuación.

Cuando un rayo de luz proveniente de un foco choca contra un espejo con forma de parábola, el rayo se refleja y continúa su camino paralelamente al eje de la parábola.

Todos los rayos que se originan en el foco forman un poderoso haz al ser reflejados. De este modo, es posible concentrar la luz y proyectarla hacia alguna dirección.



De manera inversa, si un haz de rayos paralelos al eje choca contra uno de estos espejos, cada rayo se dirigirá al foco después de reflejarse.
Una aplicación común de este fenómeno se encuentra en los faros de los coches y otros tipos de lámparas, que son paraboloides de revolución con una superficie reflejante: al colocar una fuente de luz en el foco del paraboloide, los rayos emitidos chocan contra la superficie reflejante y forman un haz de luz parelelo que, al no dispersarse, puede verse a gran distancia.


Calentador


Antena parabólica


Faro de automóvil

El comportamiento de las ondas de radio y las ondas electromagnéticas es similar al de la luz. Por eso se utilizan reflectores parabólicos para concentrar ondas de radio emitidas desde fuentes débiles y convertirlas en un haz intenso. Las antenas parabólicas, por ejemplo, reciben señales débiles y concentran en el foco señales relativamente fuertes.

Como dato curioso, la antorcha de los Juegos Olímpicos se enciende mediante un reflector parabólico, que concentra los rayos del sol en un solo punto.

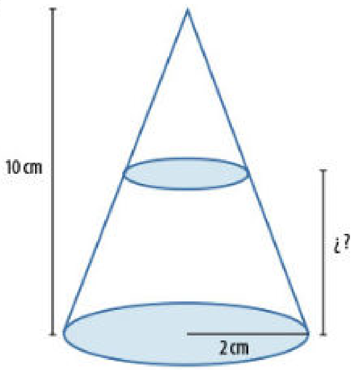
Selecciona la opción correcta.

1. La entrada a un circo cuesta \$50.00 por adulto y \$20.00 por niño. En un día se vendieron 220 boletos y se recaudaron \$6 320.00. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

   a) 60 de adulto y 160 de niño. b) 62 de adulto y 158 de niño.

   c) 64 de adulto y 156 de niño. d) 66 de adulto y 154 de niño.

2. Un cono mide 10 cm de altura y 2 cm de radio en la base. Se cortará de manera que el círculo pequeño del cono truncado tenga $\frac{1}{4}$ de la superficie del círculo grande. ¿A qué altura hay que cortar para obtenerlo?



   a) A 2 cm de la base.

   b) A 2.5 cm de la base.

   c) A 5 cm de la base.

   d) A 7.5 cm de la base.

3. Manuel tiene dos recipientes, uno cilíndrico y otro cónico. Ambos tienen el mismo radio en su base, pero el cono tiene la mitad de altura. ¿Cuántas veces es mayor el volumen del cilindro que el del cono?

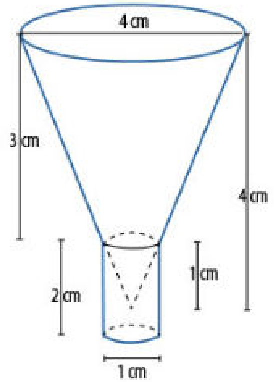
   a) Tres veces.

   b) Cuatro veces.

   c) Cinco veces.

   d) Seis veces.

4. El embudo de la figura de la derecha está formado por un cono truncado y un cilindro en la punta. ¿Cuál es el volumen del embudo?



   a) 18.06 cm^3

   b) 19.06 cm^3

   c) 20.06 cm^3

   d) 21.06 cm^3

5. El área de un rectángulo es de 80 cm^2, y su largo (x) mide 2 cm más que el ancho. ¿Qué expresión algebraica permite conocer sus medidas?

   a) $x^2 - 2x = 80$ b) $x^2 - x = 80$

   c) $x^2 + x = 80$ d) $x^2 + 2x = 80$

6. ¿En qué inciso se muestran dos resultados (R_1, R_2) igualmente probables para el lanzamiento de dos dados?

   a) R_1 = que la suma de ambos dados sea par; R_2 = que ambos dados caigan en 6.

   b) R_1 = que la suma de ambos dados sea 10; R_2 = que la suma de ambos dados sea 4.

   c) R_1 = que la suma de ambos dados sea 12; R_2 = que ambos dados caigan en número par.

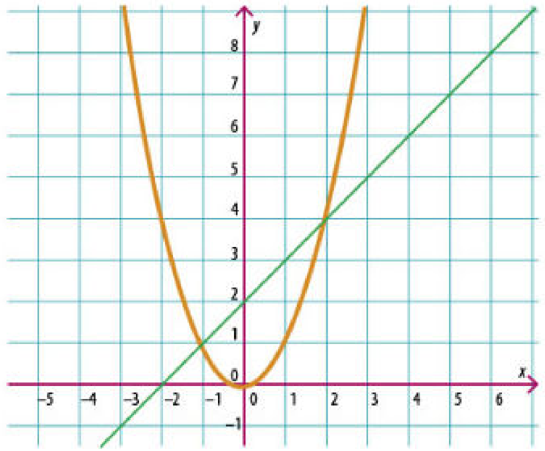
   d) R_1 = que la suma de ambos dados sea 7; R_2 = que la suma de ambos dados sea impar.

7. Daniel y Carlos juegan a lanzar dos dados y multiplicar los números que salgan. Daniel gana si el resultado es par y Carlos, si es impar. ¿Qué afirmación es correcta según lo establecido en el juego?

   a) Carlos tiene poca ventaja. b) Daniel tiene poca ventaja.

   c) Daniel tiene mucha ventaja. d) Ninguno tiene ventaja.

Considera la siguiente gráfica y selecciona la opción correcta.



8. ¿Cuál es la ecuación de la recta?

   a) $y = x + 2$ b) $y = x - 2$

   c) $y = 2x$ d) $y = -2x$

9. ¿Cuál es la ecuación de la parábola?

   a) $y = 4x^2$ b) $y = x^2 + 4$

   c) $y = x^2$ d) $y = -x^2$

10. ¿En qué puntos se intersecan la recta y la parábola?

   a) (1, –1) y (4, 2) b) (–1, 1) y (2, 4)

   c) (1, 1) y (2, 4) d) (–1, 1) y (4, 2)

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Validar procedimientos y resultados
Manejar técnicas eficientemente

Probabilidad engañosa

En una ciudad de 10 000 habitantes se ha cometido un robo. La única pista es que el ladrón mide más de 1.90 m, una estatura poco común que sólo rebasan 100 personas de la población. La policía detiene a varios sospechosos cerca de la escena del crimen y comprueba que uno mide 1.94 m. El abogado acusador argumenta lo siguiente: "Hay 9 999 inocentes y de ellos sólo 99 miden más de 1.90 m; entonces, la probabilidad de que un inocente mida más de 1.90 m es de 99/9 999 ≈ 1%. Como la probabilidad anterior es cercana a 1%, entonces la probabilidad de que el sospechoso sea culpable es cercana a 99%".

Pregunta 1. ¿Cuántas personas en la ciudad miden más de 1.90 m? ¿Cuántas de ellas son inocentes?

Pregunta 2. Calcula la probabilidad de que una persona que mide más de 1.90 sea inocente y compárala con la probabilidad de que una persona inocente mida más de 1.90 m.

Pregunta 3. El argumento del abogado es un error típico que se comete en probabilidad, conocido como la "falacia del fiscal". Investiga en qué juicios reales se convenció al jurado utilizando este tipo de razonamientos erróneos.

Pregunta 4. ¿Qué error comete el abogado en su argumentación?

Pregunta 5. ¿Qué opinas sobre el mal uso de la probabilidad y la estadística en los juicios y en la prensa?

Para cada pregunta, anota tu procedimiento y argumenta tu respuesta

COMPETENCIAS
Resolver problemas de manera autónoma
Manejar técnicas eficientemente

Un invento útil

En 1795, un famoso general europeo ofreció una cantidad considerable de dinero a quien inventara una manera efectiva para conservar los alimentos frescos durante las largas campañas militares. Así surgió la lata, que sigue siendo un recipiente común para envasar alimentos y otros productos perecederos. Una de las latas más comunes es la de forma cilíndrica, que proporciona un gran volumen con poco material.

Pregunta 1. ¿Cuánto mide el diámetro de una lata cilíndrica de 10 cm de altura y 1 000 cm^3 de volumen?

a) 35.41 cm b) 31.84 cm c) 11.28 cm d) 5.64 cm

Pregunta 2. Calcula la cantidad necesaria de material para fabricar la lata anterior. Sugerencia: imagina el tamaño y la forma de cada pieza desdoblada (tapas y cara lateral).

Pregunta 3. Calcula las dimensiones de una lata con forma de prisma rectangular, que tenga la misma altura y el mismo volumen que la lata anterior.

Pregunta 4. Calcula la cantidad necesaria de material para fabricar la lata anterior.

Pregunta 5. Investiga a qué famoso general hace alusión el texto introductorio, y quién inventó la lata que conocemos actualmente.

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones.				
Formulo problemas a partir de una ecuación dada.				
Analizo las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto.				
Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.				
Diseño las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.				
Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.				
Analizo situaciones problemáticas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.				
Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?

Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

El hotel infinito

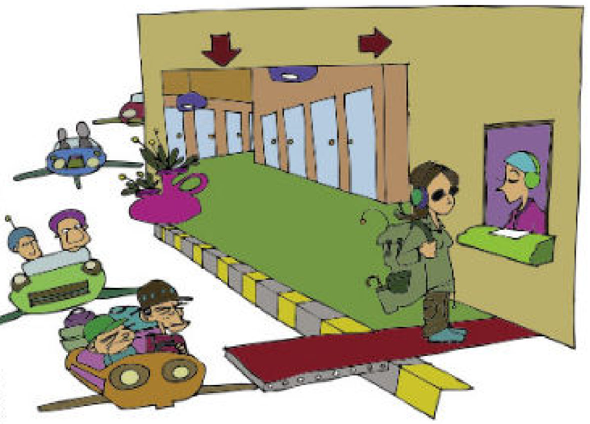
En un planeta muy lejano existe un hotel muy peculiar. Se llama Hotel Infinito, debido a que tiene un número infinito de habitaciones. El planeta está situado en un lugar de mucho tránsito espacial, por lo que no es extraño que el hotel se encuentre lleno. Una noche llegó una exploradora y pidió una habitación; y el recepcionista le dijo: "Distinguida señorita, el hotel está lleno, pero no se preocupe. Tenemos la solución perfecta". El recepcionista tomó un micrófono que tenía a su lado y su voz suave sonó en todas las habitaciones: "Estimados huéspedes, por favor, sean tan amables de fijarse en su número de habitación. Súmenle uno y pásense a la habitación con ese número". A continuación le dijo a la exploradora: "Señorita: la llevo a su habitación".

• ¿Cuál fue la habitación que ocupó la exploradora?

En otra ocasión en la que el hotel también estaba lleno, un agente de viajes llegó, muy angustiado, a la recepción. La razón de su angustia era que venía con una cantidad infinita de turistas que deseaban alojarse en el hotel. El recepcionista le dijo: "Distinguido amigo, el hotel está lleno, pero no se preocupe. Tenemos la solución perfecta". La voz del recepcionista se escuchó nuevamente en todas las habitaciones: "Estimados huéspedes, por favor, sean tan amables de fijarse en su número de habitación. Multiplíquenlo por dos y pásense a la habitación con ese número". El recepcionista sonrió al agente de viajes y le dijo: "Listo, sus turistas pueden ocupar sus habitaciones".

• ¿Cuáles fueron las habitaciones que ocuparon los turistas?

Un día, las primeras 100 habitaciones del hotel estaban vacías. Lamentablemente para el recepcionista, ese día habían cerrado las escuelas, por lo que debió llevarse al trabajo a sus 100 hijos. Para que no se aburrieran les propuso un juego: "Escúchenme bien, las puertas de las primeras 100 habitaciones están cerradas. Quiero que uno de ustedes vaya corriendo y abra todas esas puertas; luego, quiero que el segundo de ustedes pase por las puertas con un número par y las cierre; quiero que el tercero de ustedes pase por las puertas cuyo número sea múltiplo de 3 y, si una puerta está abierta, la cierre, y, si está cerrada, la abra; quiero que el cuarto de ustedes pase por las puertas cuyo número sea múltiplo de 4 y, si una puerta está abierta, la cierre, y, si está cerrada, la abra. Y así sucesivamente, hasta el último. Al final, quiero que escriban una lista con las puertas que quedaron abiertas".

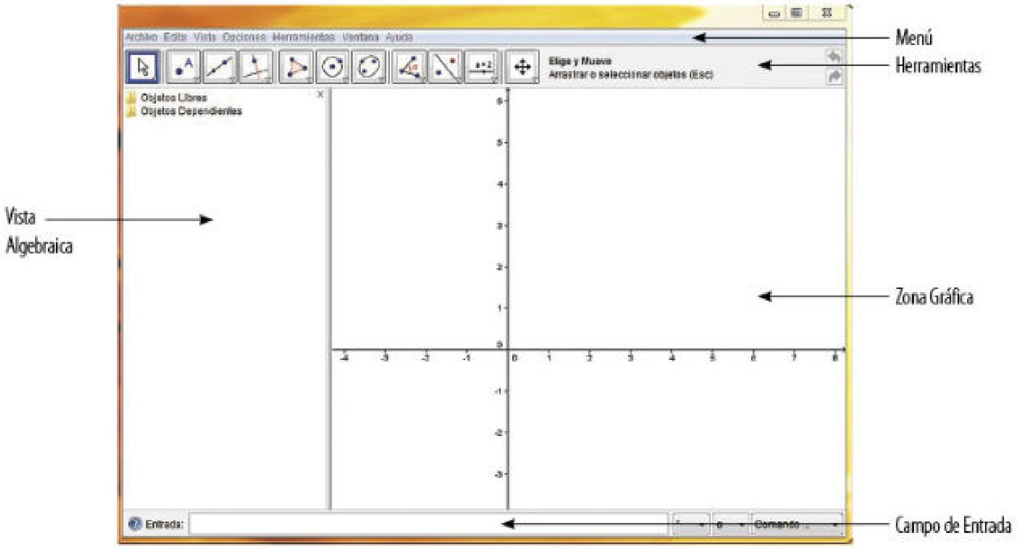


• ¿Puedes hacer la lista con las puertas que quedarán abiertas después de que pasen los 100 niños? (Una pista: resuelve primero versiones más sencillas del problema; por ejemplo, con 10 puertas y 10 niños, luego con 30 puertas y 30 niños…).

¿Geometría en la computadora?

Conoce GeoGebra
Puedes descargarlo gratis de la página www.geogebra.org/cms/

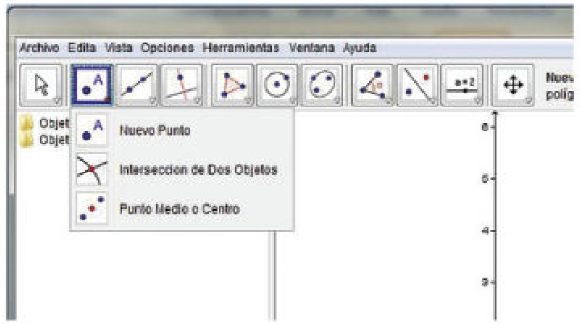
Y aparecerá una pantalla como la siguiente.

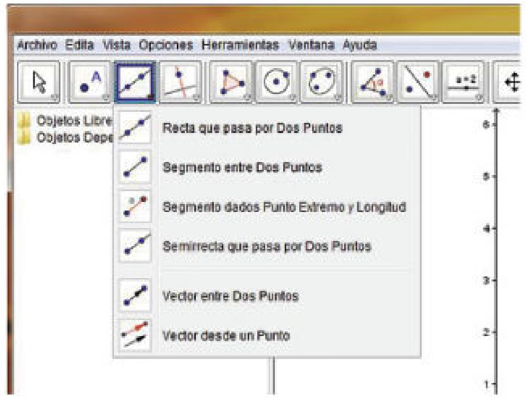


La barra de herramientas es la que contiene los comandos para hacer construcciones geométricas.

Al hacer clic en alguno de los botones de la barra de herramientas, aparece una lista de comandos.

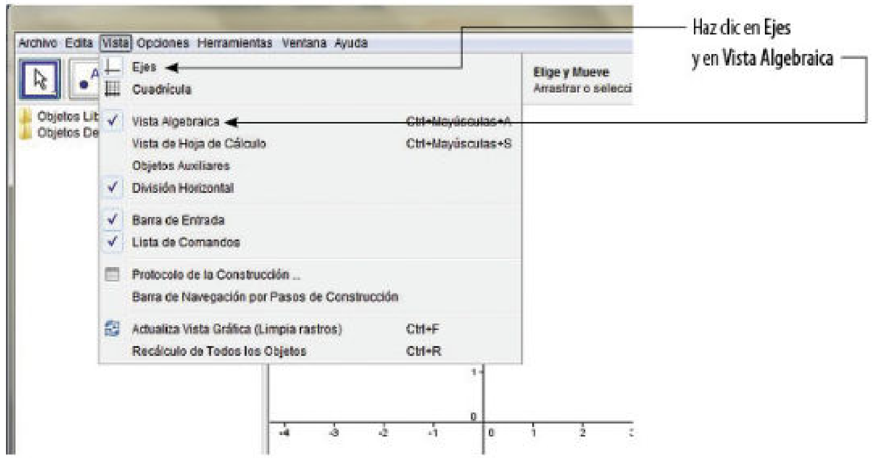
Por ejemplo, las listas de comandos del botón donde hay un punto o donde está la recta se muestran a continuación.





Para elegir un comando, basta hacer clic en él y colocarse en la **Zona Gráfica**; entonces, el apuntador toma la forma de una pequeña cruz. Al hacer clic, puedes iniciar los trazos. Para seleccionar algún elemento, la cruz se cambia por el apuntador (la flecha).

Si no necesitas la **Vista Algebraica** o los ejes de coordenadas, puedes ocultarlos haciendo clic en **Vista**, en la barra de menú, y después en dichos elementos.



Exploren e investiguen.

1. **Exploren y empiecen a conocer el programa haciendo lo siguiente.**
   a) Tracen un punto. Hagan clic con el botón derecho del ratón y seleccionen **Muestra rótulo**. Aparecerá la letra A; es el nombre del punto.
   b) Tracen una **recta** que pase por el punto A.
   c) Tracen otro punto. Hagan clic con el botón derecho del ratón y seleccionen **Muestra rótulo**. Aparecerá la letra B.
   d) Tracen una **semirrecta** que inicie en el punto B.
   e) Tracen el **segmento** AB.
   f) Borren lo que tienen en pantalla. Para ello, seleccionen todo lo que han trazado y opriman la tecla ⟵ (la que normalmente se usa para borrar) o la tecla Suprimir.
   g) Busquen la herramienta para trazar un triángulo y trácenlo.
   h) Tracen un **polígono** de seis lados. Cuando lo hayan trazado, seleccionen uno de los vértices y muévanlo para deformar el polígono.
   i) Tracen un **polígono regular** de seis lados.
   j) Tracen tres rectas que tengan diferentes relaciones entre sí, por ejemplo:
      - que las tres pasan por un punto;
      - que dos sean paralelas y la tercera las corte.

      Exploren las diferentes posiciones con las que se pueden relacionar tres rectas.
   k) Encuentren dos maneras diferentes de trazar un cuadrado.

2. Compartan sus observaciones y hallazgos con otros compañeros.

Ángulo de inclinación de una recta: ángulo más pequeño que forman la recta y el eje horizontal del plano cartesiano. Si la pendiente de la recta es negativa, la medida del ángulo también se considera negativa.

Cateto: lado que forma el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Centro de homotecia: punto donde concurren las rectas que unen vértices correspondientes de figuras homotéticas.

Coseno de un ángulo: cociente o razón entre el cateto adyacente a un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Criterio de congruencia para triángulos: conjunto de condiciones suficientes para asegurar que dos triángulos son congruentes; por ejemplo, el criterio LLL (si dos triángulos tienen tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes).

Criterio de semejanza para triángulos: conjunto de condiciones suficientes para asegurar que dos triángulos son semejantes; por ejemplo, que los triángulos tengan dos ángulos correspondientes iguales.

Desarrollo plano: conjunto de figuras planas que, al pegarlas, forman un cuerpo geométrico; por ejemplo, el desarrollo plano de un cilindro consta de dos círculos (tapas del cilindro) y un rectángulo (cara lateral del cilindro).

Desviación: para un conjunto de datos numéricos, valor absoluto de la diferencia entre un dato y el promedio.

Desviación media: promedio de las desviaciones de los datos de un conjunto numérico.

Ecuación de segundo grado: ecuación de una variable en la que el exponente más grande de la variable es 2; por ejemplo, $3x^2 + 5x = 2x^2 - 8$.

Espacio muestral: conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Eventos complementarios: dos eventos de un experimento aleatorio que abarcan todo el espacio muestral, pero no tienen elementos comunes. Las probabilidades de dos eventos complementarios siempre suman 1.

Eventos independientes: eventos de un experimento aleatorio en los que la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de que el otro suceda.

Eventos mutuamente excluyentes: eventos de un experimento aleatorio que, al no tener elementos en común, no pueden ocurrir simultáneamente.

Factorizar: reescribir una expresión algebraica o aritmética como producto de dos o más factores; por ejemplo, $x(x^2 + 1)$ es una factorización de $x^3 + x$.

Figuras congruentes: figuras que tienen la misma forma y tamaño, es decir, cuyos lados y ángulos correspondientes miden lo mismo.

Figuras homotéticas: figuras semejantes con lados correspondientes paralelos en las que las rectas que unen vértices correspondientes coinciden en un punto (el centro de homotecia).

Figuras semejantes: figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, es decir, sus ángulos correspondientes miden lo mismo y las medidas de sus lados son proporcionales.

Forma general de la ecuación de segundo grado: ecuación de segundo grado de una variable, escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: las soluciones de una ecuación cuadrática escrita en la forma general se obtienen sustituyendo los valores de a, b y c en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El signo ± indica que, por lo general, la ecuación tiene dos soluciones: una se obtiene sumando lo que está después del signo ±; la otra, restándolo.

Generatriz: segmento recto que une el vértice de un cono recto con la circunferencia de la base. Corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo que se gira para formar el cono.

Hipotenusa: lado más largo de un triángulo rectángulo. A diferencia de los catetos, la hipotenusa no forma el ángulo recto.

Medida de la probabilidad: número entre 0 y 1 que corresponde a la probabilidad de un evento de un experimento aleatorio.

Parábola: curva que se obtiene al hacer, en un cono, un corte transversal paralelo a su generatriz. Su ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Pendiente de una recta: medida de la inclinación de una recta en el plano cartesiano. Se denota con la letra m y corresponde al número que multiplica a la variable x en la ecuación de la recta.

Rango: diferencia entre el dato mayor y el menor de un conjunto numérico.

Razón de cambio: razón entre el cambio de la variable x y el cambio de la variable y de una relación numérica. En el caso de las ecuaciones de primer grado, la razón de cambio siempre coincide con la pendiente de la recta.

Razón trigonométrica: cociente o razón entre los lados de un triángulo rectángulo. Las tres razones trigonométricas más comunes son seno, coseno y tangente.

Sección cónica: curva que se obtiene al hacer cortes transversales en un cono. Las secciones cónicas son la parábola, la elipse y la hipérbola.

Seno de un ángulo: cociente o razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Sólido de revolución: cuerpo que se genera al girar una figura plana alrededor de un eje; por ejemplo, se obtiene un cilindro al girar un rectángulo tomando uno de sus lados como eje.

Tangente de un ángulo: cociente o razón entre el cateto opuesto a un ángulo y el cateto adyacente al mismo ángulo de un triángulo rectángulo.

Para el alumno

- **Bosch, Carlos y Claudia Gómez**, *Una ventana a las formas*, México, Santillana, 2003 (Biblioteca juvenil ilustrada).
- **Enzensberger, Hans Magnus**, *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 1997.
- **Perero, Mariano**, *Historia e historias de matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.
- **Tahan, Malba**, *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1994.
- **VanCleave, Janice**, *Matemáticas para niños y jóvenes*, México, Limusa, 1997.

Enlaces web recomendados (consulta: enero de 2017)

Red Educativa Digital Descartes. Materiales didácticos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas
proyectodescartes.org/EDAD/

Cuéntame. Página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía
cuentame.inegi.org.mx/

Ejercicios prácticos. Evaluaciones en línea
aulavirtual.inaeba.edu.mx/ejercicios_practicos/paginas/ejercicios_sec_mate.html

Matemáticas divertidas. Juegos interactivos
www.matematicasdivertidas.com/Zonaflash/zonaflash.html

Recursos Didácticos de Telesecundaria adaptados a HTLM5
http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.3_RecursosAdaptados/Telesecundaria/2_segundo/2_Matematicas/index.html

Las matemáticas son para siempre. TED Talks
www.ted.com/talks/eduardo_saenz_de_cabezon_math_is_forever?language=es

Para el profesor

- **Alarcón, Jesús e Higinio Barrón**, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Guía de estudio y lecturas*, México, SEP, 2001.
- _______ ***et al.***, *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP, 2001.
- **Ávila, Alicia y Silvia García Peña**, *Los decimales: más que una escritura*, México, INEE, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- **Block, David, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez**, *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM, 2010 (Somos Maestros).

- **Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Josep Gascón**, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 2000.
- **Espinosa, Hugo *et al.***, *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP, 1999.
- **Fuenlabrada, Irma *et al.***, *Juega y aprende matemáticas*, México, SEP, 1992.
- **Fonseca Cárdenas, María Teresa *et al.***, *PISA en el aula: Matemáticas*, México, INEE, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- **García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero**, *La enseñanza de la geometría*, México, INEE, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- **Gutiérrez Rodríguez, Ángel *et al.***, *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, México, SEP, 2011.
- **Ifrah, Georges**, *Historia universal de las cifras*, 2 vols., México, SEP, 2000.
- **Itzcovich, Horacio**, *Iniciación al estudio didáctico de la geometría*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
- **Mochón, Simón, Teresa Rojano y Sonia Ursini**, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las matemáticas con tecnología*, México, SEP, 2000.
- **Sadovsky, Patricia**, *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
- **Sessa, Carmen**, *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
- **Ursini, Sonia *et al.***, *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas, 2005.

Enlaces web recomendados (consulta: enero de 2017)

GeoGebra. Recursos de matemática dinámica para aprender y enseñar.
tube.geogebra.org/

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales. Colección de aplicaciones interactivas para apoyar el aprendizaje de las matemáticas
nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html

La Red Educativa Digital Descartes. Materiales didácticos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas
proyectodescartes.org/descartescms/matematicas

DivulgaMAT. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española
www.divulgamat.net/

Educar Chile. Objetos Digitales de Aprendizaje. Cuenta con el apoyo del Ministerio de Educación de Chile
www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119

Consejo Nacional de Educación para la Vida y el Trabajo. Ejercicios interactivos de matemáticas
www.conevyt.org.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=494&Itemid=968

Eduteka. Portal educativo con contenidos para docentes y directivos para enriquecer los ambientes escolares con el uso de las TIC
www.eduteka.org

Eduteka. Simulaciones de matemáticas y física
www.eduteka.org/instalables.php3

Google Earth. La información geográfica del mundo
www.google.es/intl/es/earth/index.html

Sitio de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
www.ommenlinea.org/

Bibliografía consultada

» **Ávila, Alicia y Silvia García,** *Los decimales: más que una escritura,* México, INEE, 2008.

» **Block, David,** *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* (tesis), Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, 2001.

» ______ , *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria* (tesis), Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, 1987.

» **Centeno Pérez, Julia,** *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?,* Madrid, Síntesis, 1997.

» **Fernández, Manolo *et al.*,** *Circulando por el círculo,* Madrid, Síntesis, 1996.

» **Godino, Juan y María del Carmen Batanero,** *Azar y probabilidad,* Madrid, Síntesis, 1996.

» **García, Silvia y Olga López,** *La enseñanza de la geometría,* México, INEE, 2008.

» **Sanchez, Ernesto *et al.*,** *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas,* México, SEP, 2011.

Créditos iconográficos

Nuestros autores:

Silvia García Peña. Profesora egresada de la Escuela Nacional de Maestros y de la Escuela Normal Superior de México, con especialidad en Matemáticas, cursó la maestría en Educación en la Universidad Pedagógica Nacional y la de Matemática Educativa en el CINVESTAV. Ha impartido clases en primaria, secundaria y bachillerato, y ha escrito libros de texto de matemáticas para esos niveles, así como materiales de apoyo para docentes. Ha participado en diversos cursos de actualización para profesores de primaria y secundaria.

Tatiana Mendoza von der Borch. Matemática por la UNAM y la Universidad de California, en Santa Cruz, EUA, cursó la maestría en Ciencias, con especialidad en Investigaciones Educativas, en el CINVESTAV. Ha participado en diversos proyectos de profesionalización para docentes de primaria, así como en la elaboración de materiales curriculares para secundaria.

José Cruz García Zagal. Matemático por la UNAM, cursó la maestría en Ciencias, con especialidad en Matemáticas, en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. Ha desarrollado diversos libros de texto, como coautor, para telesecundaria y, como autor, para primaria y secundaria. Actualmente es candidato a doctor en matemáticas.

David Block Sevilla. Académico del Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV), especialista en el área de Didáctica de las matemáticas. Es autor de diversos artículos y libros de texto, así como de materiales para la formación de profesores de educación básica. Ha participado en proyectos curriculares de alcance nacional y en la formación de docentes e investigadores.

conect@
sociedad del conocimiento

Los materiales de **Conect@ Estrategias** están disponibles en papel y en soporte digital. Acompañan el desarrollo de las **competencias matemáticas** de los alumnos, desde preescolar hasta secundaria, y se apegan a las disposiciones curriculares del campo de formación **Pensamiento matemático**.

Conect@ Estrategias. Matemáticas reconoce la importancia de acercar a los docentes una variedad de recursos didácticos para aplicar el enfoque de enseñanza de las matemáticas. Es por ello que en el portal **www.conectadigital-sm.com.mx** podrá registrarse para que le asignemos un código con el que usted accederá al **contenido digital** y a la **guía didáctica** que, además del **solucionario** del libro, le proporcionará **orientaciones didácticas** para el tratamiento de los contenidos. En este portal también encontrará recursos de **evaluación** (reactivos tipo PLANEA), **avance programático** editable y herramientas para el **seguimiento del aprendizaje** de sus alumnos.

conect@ digital

¡Gracias por permitirnos ser su compañero en la aventura de educar a los jóvenes de la Sociedad del Conocimiento!
www.conectadigital-sm.com.mx

163023
ISBN 978-607241021-3
9 786072 410213

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

sm
www.ediciones-sm.com.mx